MALIK YOUNSI

La méthode de renormalisation de Zalcman et ses applications

Mémoire présenté
à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval
dans le cadre du programme de maîtrise en mathématiques
pour l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

2010

Résumé

Un principe heuristique généralement attribué au mathématicien français A. Bloch stipule qu'une famille de fonctions holomorphes ayant une propriété en commun dans un certain domaine aura tendance à être normale s'il n'existe pas de fonction entière non constante ayant cette même propriété. Bien qu'il existe des contre-exemples à ce principe heuristique, celui-ci demeure néanmoins vrai dans plusieurs cas intéressants.

Récemment, L. Zalcman [26] a introduit une technique permettant de rendre le principe de Bloch rigoureux : il s'agit d'une méthode de renormalisation qui décrit le type de propriété nécessaire pour qu'une famille de fonctions méromorphes ayant cette propriété soit normale.

Le présent travail a pour but d'étudier la méthode de renormalisation de Zalcman et ses applications en analyse complexe. On y donne une présentation détaillée des principaux résultats associés ainsi que plusieurs applications, concernant, notamment, la dynamique complexe et la théorie des séries lacunaires.

Avant-propos

Tout d'abord, je tiens à remercier mon directeur de recherche, le professeur Thomas J. Ransford. Ses judieux conseils, son expérience ainsi que sa disponibilité ont été d'une valeur inestimable. En outre, je lui suis reconnaissant de m'avoir initié à la recherche en mathématiques pures lors de deux projets de recherche d'été de premier cycle.

Ensuite, je remercie le département de mathématiques et de statistique pour m'avoir confié à plusieurs reprises des tâches d'auxiliaire d'enseignement dans différents cours de premier cycle. Ces expériences ont été fort agréables et enrichissantes.

En outre, ce travail n'aurait jamais vu le jour sans le support inconditionnel de ma famille, de mes amis et surtout de Claudia, dont l'amour et le soutien font de moi un homme comblé.

Enfin, je remercie le Conseil de recherche en sciences naturelles et génie du Canada (CRSNG) pour son appui financier.

À Claudia.

« The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's must be beautiful ; the ideas, like the colors or the words must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test : there is no permanent place in this world for ugly mathematics. »

- G.H. Hardy (1877-1947)

Table des matières

Liste des tableaux

Table des figures

Chapitre 1

Introduction

Le concept de famille normale fut d'abord introduit par P. Montel en 1907 dans un article intitulé *Sur les suites infinies de fonctions* [16]. Or, il fallut attendre quelques années pour que l'intérêt envers la théorie des familles normales se fît sentir dans la communauté mathématique de l'époque. En 1917, le mathématicien français P. Fatou utilisa les résultats de Montel sur les familles normales dans une série de travaux portant sur l'itération des fonctions complexes. Par la suite, en 1918, G. Julia publia son célèbre *Mémoire sur l'itération des fonctions rationelles*, dans lequel fut mis en évidence pour la toute première fois l'ensemble qui porte aujourd'hui le nom d'*ensemble de Julia*. En combinant des résultats sur l'itération des fonctions complexes avec le célèbre théorème de Montel, Fatou et Julia développèrent plusieurs propriétés intéressantes de l'ensemble de Julia et de son complément, aujourd'hui appelé l'*ensemble de Fatou*.

Il fallut attendre les années 1980 pour que de nouveaux développements remarquables surviennent en dynamique complexe. En effet, l'arrivée des ordinateurs permit de produire les premières images numériques d'ensembles de Mandelbrot et de Julia, ce qui entraîna un regain d'intérêt pour la dynamique complexe et donc, *a fortiori*, pour la théorie des familles normales de fonctions méromorphes. Cette dernière connaît depuis la fin du vingtième siècle un essor considérable, en partie grâce à l'étude approfondie d'un principe heuristique dû au mathématicien français A. Bloch. Ce *principe heuristique de Bloch* affirme qu'une famille de fonctions holomorphes ayant une propriété en commun dans un domaine aura tendance à être normale s'il n'existe pas de fonction entière non constante ayant cette même propriété. Bien qu'il existe des contre-exemples au principe de Bloch, celui-ci demeure néanmoins vrai dans plusieurs cas intéressants.

Dans le but rendre le principe heuristique de Bloch rigoureux, L. Zalcman démontra en 1975 un lemme caractérisant les familles normales de fonctions holomorphes ou méromorphes [25]. À travers les années, ce lemme s'est révélé extrêmement fructueux et fondamental dans l'étude des familles normales, puisqu'il permet notamment d'obtenir de nouvelles démonstrations courtes et élémentaires d'importants théorèmes en théorie des fonctions complexes et en dynamique complexe. Le lemme de Zalcman intervient dans une méthode plus générale portant le nom de *méthode de renormalisation de Zalcman*. Le présent mémoire a pour but d'étudier cette méthode en détail et d'en donner plusieurs applications.

La première partie du mémoire porte sur des résultats classiques concernant les familles normales. Plus précisément, le chapitre 3 aborde les familles normales de fonctions holomorphes. On y présente le théorème de Montel, le critère fondamental de Montel ainsi que le petit théorème de Picard. Le chapitre 4, quant à lui, porte sur les familles normales de fonctions méromorphes. On y retrouve le théorème de Montel pour les fonctions méromorphes de même que le critère de Marty, qui fournit une condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de fonctions méromorphes soit normale. La seconde partie du mémoire concerne la méthode de renormalisation de Zalcman. Le chapitre 5 présente de façon détaillée le principe de Bloch, le principe de Zalcman ainsi qu'une généralisation, le principe de Minda. Enfin, le chapitre 6 est consacré aux applications de la méthode de Zalcman. On y présente d'abord des démonstrations courtes et élémentaires des théorèmes de Picard et de Montel. Ensuite, une partie du chapitre est réservée à la dynamique complexe. La méthode de Zalcman est utilisée pour démontrer une version faible du théorème des cinq îles d'Ahlfors, ce qui nous permet d'obtenir une preuve simple et élégante du fait que l'ensemble de Julia d'une fonction entière transcendante est égal à la fermeture de l'ensemble de ses points périodiques répulsifs. Enfin, la dernière section du mémoire porte sur la théorie des séries lacunaires, plus précisément sur une conjecture encore ouverte concernant la normalité d'une famille particulière de telles séries.

Chapitre 2

Préliminaires

Ce chapitre contient les différentes notions préalables à ce mémoire. On introduit notamment la distance cordale ainsi que les notions de convergence, de continuité et de dérivabilité qui lui sont associées. Enfin, on présente la convergence localement uniforme et le concept d'équicontinuité. Les quelques résultats énoncés sont plutôt classiques ; on se contente donc de les citer sans démonstration. Le lecteur peut se référer à [24] pour de plus amples détails.

2.1 Notations

Expression	Signification
$\mathbb{Z}$	Les entiers.
$\mathbb{N}$	Les nombres naturels $1, 2, 3, \ldots$
$\mathbb{R}$	Les nombres réels.
$\mathbb{C}$	Le plan complexe.
$\mathbb{C}_\infty$	La compactification du plan complexe, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
Σ	La sphère de Riemann, identifiée avec $\mathbb{C}_\infty$.
$\mathbb{T}$	Le cercle unité $\{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert = 1\}$.
$\mathbb{D}$	Le disque unité $\{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert < 1\}$.
$\mathbb{D}(z_0, r)$	Le disque ouvert centré en $z_0 \in \mathbb{C}$ de rayon $r > 0$, $\{z : \lvert z - z_0\rvert < r\}$.
$\overline{\mathbb{D}(z_0, r)}$	Le disque fermé centré en $z_0 \in \mathbb{C}$ de rayon $r > 0$, $\{z : \lvert z - z_0\rvert \leq r\}$.
$\overline{E}, E^o, \partial E, \lvert E\rvert$	La fermeture, l'intérieur, la frontière, la cardinalité d'un ensemble E.

TABLE 2.1 – *Notations*

2.2 La distance cordale

Soit Σ la sphère de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2 + y^2 + (z - 1/2)^2 = 1/4$, identifiée avec $\mathbb{C}_\infty$ *via* la projection stéréographique. Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ correspondant à $P_1, P_2 \in \Sigma$ respectivement, par la projection stéréographique. Si $P_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, $i = 1, 2$, alors la distance euclidienne entre P_1 et P_2 est donnée par

$$|P_1 - P_2| = \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2 + (\gamma_1 - \gamma_2)^2}.$$

On définit la **distance cordale** entre z_1 et z_2, que l'on note $\chi(z_1, z_2)$, par

$$\chi(z_1, z_2) := |P_1 - P_2|.$$

Un calcul élémentaire montre que si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, alors

$$\chi(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2}}$$

et si $z_2 = \infty$, alors

$$\chi(z_1, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}.$$

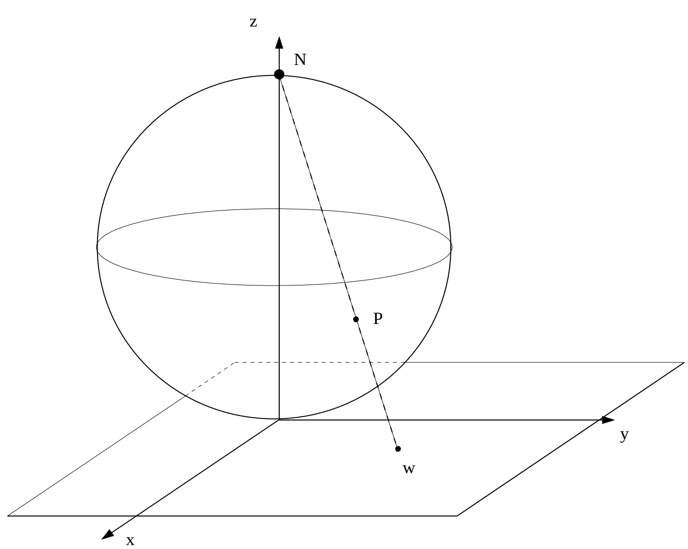

FIGURE 2.1 – *Projection stéréographique*

La proposition suivante énumère différentes propriétés de la distance cordale qui se vérifient facilement :

Proposition 2.2.1.

(1) $\chi(\cdot,\cdot)$ *est une métrique sur* $\mathbb{C}_\infty$.

(2) $\chi(z_1, z_2) \leq 1$ *pour tout* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_\infty$.

(3) $\chi(z_1, z_2) \leq |z_1 - z_2|$ *pour tout* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(4) *Si* $|z_1| \leq |z_2| \leq \infty$, *alors* $\chi(0, z_1) \leq \chi(0, z_2)$.

(5) $\chi\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) = \chi(z_1, z_2)$ *pour tout* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_\infty$.

2.3 Convergence, continuité et dérivabilité

En tant que métrique sur $\mathbb{C}_\infty$, la distance cordale a des notions de convergence et de continuité qui lui sont associées :

Définition. *Une suite de fonctions* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge* χ***-uniformément*** *vers* f *sur un ensemble* E *si pour chaque* $\varepsilon > 0$, *il existe un entier* n_0 *tel que si* $n \geq n_0$, *alors*

$$\chi(f(z), f_n(z)) < \varepsilon$$

pour chaque $z \in E$.

Notons que la convergence uniforme habituelle implique la convergence χ-uniforme, en vertu de la partie **(3)** de la proposition précédente. On a la réciproque partielle suivante :

Proposition 2.3.1. *Soit* $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite de fonctions qui converge* χ*-uniformément sur un ensemble* E *vers une fonction bornée* f. *Alors la suite* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge uniformément sur* E *vers la même fonction* f.

La notion de continuité, quant à elle, se traduit de la façon suivante :

Définition. *Une fonction* f *est dite* χ***-continue*** *en un point* $z_0 \in \mathbb{C}$ *si pour chaque* $\varepsilon > 0$, *il existe un* $\delta > 0$ *tel que*

$$\chi(f(z), f(z_0)) < \varepsilon$$

si $|z - z_0| < \delta$.

Proposition 2.3.2. *Si* f *est méromorphe sur un domaine* D, *alors* f *est* χ*-continue sur* D.

Démonstration. Soit $z_0 \in D$. Si z_0 n'est pas un pôle de f, alors f est holomorphe sur un voisinage de z_0 et donc χ-continue en ce point car

$$\chi(f(z), f(z_0)) \leq |f(z) - f(z_0)|.$$

Si z_0 est un pôle de f, alors $\frac{1}{f}$ est continue en z_0 et le résultat découle du fait que

$$\chi(f(z), f(z_0)) = \chi\left(\frac{1}{f(z)}, \frac{1}{f(z_0)}\right).$$

□

La notion de dérivée possède également un analogue selon la distance cordale :

Soit f une fonction méromorphe sur un domaine D. Si $z \in D$ n'est pas un pôle de f, alors la **dérivée sphérique** de f en z est donnée par

$$\begin{aligned} f^{\#}(z) &:= \lim_{w \to z} \frac{\chi(f(z), f(w))}{|z - w|} \\ &= \lim_{w \to z} \frac{|f(z) - f(w)|}{|z - w|} \frac{1}{\sqrt{1 + |f(z)|^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + |f(w)|^2}} \\ &= \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}. \end{aligned}$$

Si $\zeta \in D$ est un pôle de f, alors on définit

$$f^{\#}(\zeta) := \lim_{z \to \zeta} \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}.$$

La dérivée sphérique d'une fonction méromorphe f est donc continue et satisfait

$$f^{\#} = \left(\frac{1}{f}\right)^{\#}.$$

2.4 Convergence localement uniforme et équicontinuité

Les deux notions suivantes interviennent rapidement dans l'étude des familles normales :

Définition. *On dit qu'une suite de fonctions* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge* ***localement uniformément (localement*** χ***-uniformément)*** *sur un domaine* D *vers une fonction* f *si, pour chaque compact* $K \subseteq D$ *et pour chaque* $\varepsilon > 0$*, il existe un entier* $n_0 = n_0(K, \varepsilon)$ *tel que, si* $n \geq n_0$*, alors*

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \qquad (\chi(f_n(z), f(z)) < \varepsilon)$$

pour chaque $z \in K$.

Définition. *Une famille de fonctions* $\mathcal{F}$ *est dite* ***localement uniformément bornée*** *sur un domaine* D *si pour chaque compact* $K \subseteq D$*, il existe une constante réelle positive* $M = M(K)$ *telle que*

$$|f(z)| \leq M$$

pour chaque $z \in K$ *et chaque* $f \in \mathcal{F}$.

Dans le cas des fonctions holomorphes, on a la proposition suivante, qui découle presque directement de la formule de Cauchy :

Proposition 2.4.1. *Soit* $\mathcal{F}$ *une famille de fonctions holomorphes sur un domaine* D*. Si* $\mathcal{F}$ *est localement uniformément bornée sur* D*, alors la famille des dérivées* $\mathcal{F}' := \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ *est aussi localement uniformément bornée sur* D.

On aura également besoin de la définition suivante :

Définition. *Une famille* $\mathcal{F}$ *de fonctions définies sur un domaine* D *est dite* ***équicontinue (***χ***-équicontinue)*** *en un point* $z' \in D$ *si, pour chaque* $\varepsilon > 0$*, il existe un* $\delta = \delta(z', \varepsilon)$ *tel que*

$$|f(z) - f(z')| < \varepsilon \qquad (\chi(f(z), f(z')) < \varepsilon)$$

si $|z - z'| < \delta$*, pour chaque* $f \in \mathcal{F}$*. De plus,* $\mathcal{F}$ *est dite* ***équicontinue (***χ***-équicontinue) sur un ensemble*** $E \subseteq D$ *si* $\mathcal{F}$ *est équicontinue en chaque point de* E.

Enfin, les propositions suivantes établissent les liens entre ces différents concepts :

Proposition 2.4.2. *Si* $(f_n)_{n\geq 1}$ *est une suite de fonctions* χ*-continues qui converge localement* χ*-uniformément sur un domaine* D *vers une fonction* f*, alors* f *est uniformément* χ*-continue sur chaque compact* $K \subseteq D$ *et les* f_n *sont* χ*-équicontinues sur* D.

Proposition 2.4.3. *Soit* $\mathcal{F}$ *une famille de fonctions holomorphes sur un domaine* D*. Si* $\mathcal{F}$ *est localement uniformément bornée, alors* $\mathcal{F}$ *est équicontinue sur* D.

Première partie

La théorie des familles normales

Chapitre 3

Familles normales de fonctions holomorphes

Ce chapitre constitue une introduction aux familles normales de fonctions holomorphes, telles qu'introduites par Montel en 1907. On définit d'abord la notion de famille normale, pour ensuite énoncer le célèbre théorème de Montel ainsi que certains résultats associés. Enfin, on termine le chapitre avec le critère fondamental de Montel et le petit théorème de Picard.

3.1 Définitions

Définition. *Une famille $\mathcal{F}$ de fonctions holomorphes sur un domaine $D \subseteq \mathbb{C}$ est dite* ***normale*** *sur D si chaque suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{F}$ possède une sous-suite qui converge localement uniformément sur D vers une fonction limite f, qui peut être identiquement ∞.*

Si la fonction limite f n'est pas identiquement ∞, alors elle est nécessairement holomorphe sur D par un théorème de Weierstrass. On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge localement uniformément sur D vers la fonction identiquement ∞ si pour chaque compact $K \subseteq D$ et pour chaque constante $M > 0$,

$$|f_n(z)| > M$$

pour chaque $z \in K$, en supposant que $n = n(K, M)$ est suffisament grand.

De plus, on dit que $\mathcal{F}$ est normale en un point $z_0 \in D$ si $\mathcal{F}$ est normale sur un certain voisinage ouvert de z_0. Le théorème suivant établit le lien entre la normalité d'une famille sur un domaine et la normalité de cette même famille en chaque point du domaine :

Théorème 3.1.1. *Une famille $\mathcal{F}$ de fonctions holomorphes est normale sur un domaine D si et seulement si $\mathcal{F}$ est normale en chaque point de D.*

Démonstration. [24], p. 34. □

Enfin, remarquons que la propriété d'être une famille normale est invariante sous composition avec une transformation conforme. Autrement dit, si D_1 et D_2 sont deux domaines et $\phi : D_2 \to D_1$ une transformation conforme, alors une famille $\mathcal{F}$ de fonctions holomorphes sur D_1 est normale sur ce domaine si et seulement si la famille $\mathcal{F}_\phi := \{f \circ \phi : f \in \mathcal{F}\}$ est normale sur D_2. Ainsi, pour étudier la normalité d'une famille de fonctions $\mathcal{F}$ sur un domaine D, il est parfois plus facile d'étudier la normalité de la famille associée $\mathcal{F}_\phi$ sur le disque unité $\mathbb{D}$ (avec ϕ une transformation conforme bien choisie), ce qui est équivalent en vertu de la remarque et du théorème (3.1.1).

3.2 Théorème de Montel et résultats associés

Le point de départ de l'étude des familles normales de fonctions holomorphes est le célèbre résultat suivant, connu sous le nom de théorème d'Arzelà–Ascoli :

Théorème 3.2.1 (Arzelà–Ascoli)**.** *Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine et soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions continues sur D. Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge localement uniformément sur D vers une fonction limite f non identiquement ∞, alors $(f_n)_{n\geq 1}$ est équicontinue sur D et f est continue. Réciproquement, si $(f_n)_{n\geq 1}$ est équicontinue et localement uniformément bornée sur D, alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge localement uniformément sur D vers une fonction limite f continue.*

Dans le cas d'une famille de fonctions holomorphes, Montel observa que si $(f_n)_{n\geq 1}$ est localement uniformément bornée, alors $(f_n)_{n\geq 1}$ est équicontinue, ce qui mène au résultat suivant :

Théorème 3.2.2 (Théorème de Montel)**.** *Si $\mathcal{F}$ est une famille de fonctions holomorphes localement uniformément bornée sur un domaine D, alors $\mathcal{F}$ est normale sur D.*

Démonstration. [24], p. 35–36. □

Remarquons que la réciproque du théorème de Montel est fausse en général. En effet, il suffit de considérer par exemple la famille $\mathcal{F} := \{f_n(z) \equiv n\}$, qui est normale sur $\mathbb{C}$ mais pas localement uniformément bornée. Néanmoins, on a la réciproque partielle suivante :

Théorème 3.2.3. *Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions holomorphes sur un domaine D telle que chaque suite $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{F}$ possède une sous-suite qui converge localement uniformément sur D vers une fonction holomorphe. Alors $\mathcal{F}$ est localement uniformément bornée, et en particulier équicontinue.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{F}$ n'est pas localement uniformément bornée sur D. Alors il existe un compact $K \subseteq D$ tel que pour chaque n, il existe une fonction $f_n \in \mathcal{F}$ et un point $z_n \in K$ tels que

$$|f_n(z_n)| > n.$$

Or, on peut extraire une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge uniformément sur K vers une fonction holomorphe, disons f. Ainsi, pour un $k_0 \in \mathbb{N}$ et $k \geq k_0$, on a

$$|f_{n_k}(z) - f(z)| < 1$$

et ce, pour tout $z \in K$. Si $M := \max_{z\in K} |f(z)| < \infty$, alors

$$|f_{n_k}(z)| \leq 1 + M \qquad (z \in K,\ k \geq k_0),$$

ce qui contredit le fait que $|f_{n_k}(z_{n_k})| \to \infty$ lorsque $k \to \infty$.

□

En combinant le théorème précédent avec la définition de famille normale, on obtient :

Corollaire 3.2.4. *Soit $\mathcal{F}$ une famille normale de fonctions holomorphes sur un domaine D. Si pour un $z_0 \in D$ et une constante $M < \infty$,*

$$|f(z_0)| \leq M \qquad (f \in \mathcal{F}),$$

alors $\mathcal{F}$ est localement uniformément bornée.

Le résultat suivant est une conséquence intéressante du théorème de Montel :

Théorème 3.2.5 (Vitali)**.** *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions holomorphes sur un domaine D. Supposons que $(f_n)_{n\geq 1}$ est localement uniformément bornée et que $\lim_{n\to\infty} f_n(z)$ existe pour chaque $z \in E$, où $E \subseteq D$ possède un point d'accumulation dans D. Alors la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge localement uniformément sur D vers une fonction holomorphe.*

Démonstration. [24], p. 44. □

Pour conclure cette section, on énonce sans démonstration les résultats suivants, qui relient la normalité d'une famille de fonctions holomorphes avec celle de la famille des dérivées :

Proposition 3.2.6. *Soit $\mathcal{F}$ une famille normale de fonctions holomorphes sur un domaine D. Si pour un $z_0 \in D$ et une constante $M < \infty$, on a*

$$|f(z_0)| \leq M \qquad (f \in \mathcal{F}),$$

alors la famille des dérivées $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ est localement uniformément bornée et normale sur D.

Proposition 3.2.7. *Si $\mathcal{F}$ est une famille de fonctions holomorphes sur un domaine D et si la famille $\mathcal{F}'$ est localement uniformément bornée, alors $\mathcal{F}$ est normale sur D.*

3.3 Critère fondamental de Montel et petit théorème de Picard

En 1912, Montel présenta le résultat suivant sur la normalité d'une famille particulière de fonctions holomorphes :

Théorème 3.3.1 (Critère fondamental de Montel)**.** *Soit $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ distincts et $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine. Soit $\mathcal{F}$ la famille des fonctions f holomorphes sur D telles que $f(z) \neq a_1, a_2$ pour chaque $z \in D$. Alors $\mathcal{F}$ est normale sur D.*

Il existe plusieurs démonstrations différentes de ce résultat, voir par exemple la section 6.1 pour une preuve qui utilise la méthode de Zalcman. On peut facilement généraliser le critère fondamental de Montel pour obtenir le résultat suivant :

Théorème 3.3.2 (Critère fondamental de Montel généralisé)**.** *Soit $a, b \in \mathbb{C}$ distincts et soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine et soit $\mathcal{F}$ la famille des fonctions holomorphes sur D qui omettent la valeur a et qui prennent la valeur b au plus n fois. Alors $\mathcal{F}$ est normale sur D.*

Démonstration. On peut supposer que $a = 0$ et $b = 1$, quitte à considérer la famille

$$\tilde{\mathcal{F}} := \left\{ \tilde{f}(z) := \frac{f(z) - a}{b - a} : f \in \mathcal{F} \right\}$$

dont la normalité est équivalente à celle de $\mathcal{F}$. Pour chaque fonction $f \in \mathcal{F}$, définissons $g(z) := \sqrt[n+1]{f(z)}$. Comme chaque $f \in \mathcal{F}$ ne s'annule pas sur D, chaque g est holomorphe sur D et ne s'annule pas non plus. Soit $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n+1}$ les $(n+1)$-ièmes racines de l'unité. Comme chaque $f \in \mathcal{F}$ prend la valeur 1 au plus n fois dans D, il suit que chaque fonction g ne prend pas une des valeurs w_j pour un $j \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$. Par conséquent, les fonctions $h(z) := g(z)/w_j$ omettent les valeurs 0 et 1 et forment donc une famille normale, en vertu du critère fondamental de Montel. Enfin, ceci entraîne que les fonctions $f(z) = (w_j h(z))^{n+1} = (h(z))^{n+1}$ forment également une famille normale, ce qui termine la démonstration.

$\square$

Le résultat suivant se révèle intimement lié au critère fondamental de Montel :

Théorème 3.3.3 (Petit théorème de Picard)**.** *Soit $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ distincts et soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière. Si f omet les valeurs a_1 et a_2, alors f est constante.*

Démonstration. Supposons que f est entière et omet $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ avec $a_1 \neq a_2$. Considérons la suite de disques $\mathbb{D}_n := \mathbb{D}(0, 2^n) = \{z : |z| < 2^n\}$, $n \in \mathbb{N}$, et définissons les fonctions

$$f_n(z) := f(2^n z),$$

qui sont aussi entières. Alors $f_n(\mathbb{D}_1) = f(\mathbb{D}_{n+1})$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$, et donc chaque f_n omet les valeurs a_1 et a_2 dans $\mathbb{D}_1$. Par le critère fondamental de Montel, $(f_n)_{n \geq 1}$ est normale et comme $f_n(0) = f(0)$ pour chaque n, il suit de (3.2.4) que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ est localement uniformément bornée sur $\mathbb{D}_1$. Ainsi, f est bornée sur $\mathbb{C}$ et donc constante par le théorème de Liouville.

$\square$

La normalité d'une famille de fonctions holomorphes ayant une propriété en commun sur un certain domaine se révèle donc fortement reliée, dans ce cas-ci du moins, au fait qu'il n'existe pas de fonction entière non constante ayant cette propriété. Ce lien, mieux connu sous le nom de *principe heuristique de Bloch*, sera étudié en détail dans le chapitre 5.

Chapitre 4

Familles normales de fonctions méromorphes

La normalité des familles normales de fonctions méromorphes est généralement étudiée en utilisant la distance cordale, une approche qui permet de traiter plus facilement les pôles des fonctions. Certains résultats concernant les familles normales de fonctions méromorphes sont tout simplement des extensions naturelles des théorèmes du chapitre 3, tandis que d'autres constituent des nouveautés très intéressantes.

Ce chapitre introduit d'abord la définition de famille normale de fonctions méromorphes, ainsi que certains résultats qui font le lien entre cette nouvelle définition et celle du chapitre 3. Par la suite, on présente l'analogue du théorème de Montel pour les fonctions méromorphes ainsi qu'un nouveau résultat, le théorème de Marty, qui fournit un critère fort utile pour déterminer si une famille de fonctions méromorphes est normale ou non.

4.1 Définitions

Définition. *Une famille $\mathcal{F}$ de fonctions méromorphes sur un domaine D est dite* **normale** *sur D si chaque suite $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{F}$ possède une sous-suite qui converge localement χ-uniformément.*

La proposition suivante établit le lien entre les deux types de convergence localement uniforme (selon la distance euclidienne et selon la distance cordale) :

Proposition 4.1.1. *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions méromorphes sur un domaine*

D. Alors $(f_n)_{n\geq 1}$ converge localement χ-uniformément sur D vers f si et seulement si pour chaque $z_0 \in D$, il existe un disque fermé $\overline{\mathbb{D}(z_0,r)} \subseteq D$ sur lequel

$$|f_n - f| \to 0 \qquad ou \qquad \left|\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f}\right| \to 0$$

uniformément, lorsque $n \to \infty$.

Démonstration. [24], p.72. □

Notons que dans le cas où $|f_n - f| \to 0$, f est bornée sur $\overline{\mathbb{D}(z_0,r)}$ et holomorphe sur $\mathbb{D}(z_0,r)$.

Les deux corollaires suivants découlent de la proposition (4.1.1) :

Corollaire 4.1.2. *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions méromorphes sur un domaine D qui converge localement χ-uniformément sur D vers une fonction f. Alors ou bien f est méromorphe sur D, ou bien $f \equiv \infty$.*

Corollaire 4.1.3. *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions holomorphes sur un domaine D qui converge localement χ-uniformément sur D vers une fonction f. Alors ou bien f est holomorphe sur D ou bien $f \equiv \infty$.*

Dans le cas de suites de fonctions holomorphes, la proposition suivante nous garantit que les deux types de convergence sont équivalents :

Proposition 4.1.4. *Une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions holomorphes sur un domaine D converge localement uniformément vers une fonction holomorphe f si et seulement si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge localement χ-uniformément vers cette même fonction f.*

Corollaire 4.1.5. *Une famille $\mathcal{F}$ de fonctions holomorphes sur un domaine D est normale sur D selon la distance euclidienne si et seulement si $\mathcal{F}$ est normale sur D selon la distance cordale.*

4.2 Théorème de Montel pour les familles de fonctions méromorphes

Le résultat suivant est l'analogue du théorème de Montel pour les familles de fonctions méromorphes :

Théorème 4.2.1 (Théorème de Montel)**.** *Une famille $\mathcal{F}$ de fonctions méromorphes sur un domaine D est normale sur D si et seulement si $\mathcal{F}$ est χ-équicontinue sur D.*

Démonstration. [24], p.74. □

De même, le critère fondamental possède également un analogue pour les fonctions méromorphes, dans lequel le nombre de valeurs omises est trois et non deux :

Théorème 4.2.2 (Critère fondamental de Montel pour les fonctions méromorphes)**.** *Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions méromorphes sur un domaine D qui omettent trois valeurs distinctes $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}_\infty$. Alors $\mathcal{F}$ est normale sur D.*

Le petit théorème de Picard devient, quant à lui :

Théorème 4.2.3 (Petit théorème de Picard pour les fonctions méromorphes)**.** *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ une fonction méromorphe. Supposons que f omet trois valeurs distinctes $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}_\infty$. Alors f est nécessairement constante.*

4.3 Critère de Marty

Pour conclure ce chapitre, voici un critère très utile pour déterminer la normalité d'une famille de fonctions méromorphes :

Théorème 4.3.1 (Critère de Marty)**.** *Une famille $\mathcal{F}$ de fonctions méromorphes sur un domaine D est normale sur D si et seulement si pour chaque compact $K \subseteq D$, il existe une constante $C = C(K)$ telle que*

$$f^{\#}(z) = \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} \leq C \qquad (z \in K,\ f \in \mathcal{F}).$$

Autrement dit, $\mathcal{F}$ est normale si et seulement si la famille $\{f^{\#} : f \in \mathcal{F}\}$ est localement uniformément bornée.

Démonstration. Supposons que la famille $\{f^{\#} : f \in \mathcal{F}\}$ est localement uniformément bornée. Soit $z_0 \in D$ et prenons un disque fermé $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)} \subseteq D$. Pour chaque $z \in \overline{\mathbb{D}(z_0, r)}$, soit Γ le contour en ligne droite reliant z_0 à z. Alors

$$\chi(f(z_0), f(z)) \leq \int_\Gamma f^{\#}(\zeta)|d\zeta|.$$

Ainsi, pour une constante $C = C(z_0)$, on a

$$\chi(f(z_0), f(z)) \leq C|z - z_0|,$$

et ce pour chaque $f \in \mathcal{F}$. Il suit que $\mathcal{F}$ est équicontinue et donc normale sur D par le théorème de Montel.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{F}$ est normale sur D mais que la famille $\{f^\# : f \in \mathcal{F}\}$ n'est pas localement uniformément bornée. Alors il existe un compact K, une suite de points $(z_n)_{n\geq 1} \subseteq K$ et une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{F}$ tels que

$$f_n^\#(z_n) \to \infty$$

lorsque $n \to \infty$. Or, la normalité de $\mathcal{F}$ implique l'existence d'une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge localement χ-uniformément sur D, disons vers f. Il suit de (4.1.1) qu'autour de chaque $z_0 \in K$, il existe un disque fermé $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)} \subseteq D$ sur lequel on a

$$f_{n_k} \to f \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{f_{n_k}} \to \frac{1}{f}$$

uniformément lorsque $k \to \infty$.

Dans le premier cas, f est holomorphe sur $\mathbb{D}(z_0, r)$ et bornée sur $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)}$. Il suit que les f_{n_k} sont holomorphes sur $\mathbb{D}(z_0, r)$ pour k suffisament grand. Alors $f_{n_k}^\# \to f^\#$ uniformément sur $\mathbb{D}(z_0, r)$. Comme $f^\#$ est bornée sur $\mathbb{D}(z_0, r)$, il suit que les $f_{n_k}^\#$ le sont aussi.

Dans le second cas, il suffit de remplacer f_{n_k} et f par $\frac{1}{f_{n_k}}$ et $\frac{1}{f}$ respectivement et d'appliquer ensuite le même argument. Comme la dérivée sphérique satisfait $g^\# = (\frac{1}{g})^\#$, on obtient la même conclusion.

Finalement, comme K est compact, on peut trouver un recouvrement fini de disques sur chacun desquels les $f_{n_k}^\#$ sont bornées. En prenant le maximum de ces bornes, on déduit que les $f_{n_k}^\#$ sont bornées sur K, ce qui est une contradiction.

$\square$

Deuxième partie

Méthode de L. Zalcman

Chapitre 5

Principe de Bloch et méthode de Zalcman

Ce chapitre constitue une introduction au principe heuristique de Bloch ainsi qu'à sa formulation rigoureuse, le principe de Zalcman. On donne quelques exemples et on termine le chapitre avec le principe de Minda, qui est une généralisation du principe de Zalcman.

5.1 Principe de Bloch, exemples et contre-exemples

Le but de cette section est d'introduire le lien entre la normalité d'une famille de fonctions holomorphes (méromorphes) sur un domaine du plan ayant une certaine propriété en commun et l'existence ou non d'une fonction entière (méromorphe sur $\mathbb{C}$) non constante ayant cette même propriété. Plusieurs résultats classiques de l'analyse complexe confirment en effet l'existence d'un tel lien. Considérons par exemple le célèbre théorème de Liouville versus le théorème de Montel : le premier stipule qu'il n'existe pas de fonction entière non constante et bornée, alors que le second affirme qu'une famille de fonctions holomorphes sur un domaine D localement uniformément bornée est nécessairement normale. Un second exemple plutôt éloquent est celui de la propriété d'omettre trois valeurs distinctes : le petit théorème de Picard affirme qu'il n'existe pas de fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ non constante qui omet trois valeurs distinctes $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}_\infty$, alors que son analogue, le critère fondamental de Montel, stipule que la famille de fonctions méromorphes associée est normale.

Cette dualité mène naturellement au principe heuristique suivant, souvent mentionné sous l'appellation de *principe heuristique de Bloch* dans la littérature, bien que le mathématicien André Bloch ne semble pas l'avoir énoncé explicitement :

Une famille de fonctions holomorphes ayant une propriété $\mathcal{P}$ en commun dans un domaine D aura tendance à être normale s'il n'existe pas de fonction entière non constante qui a cette même propriété $\mathcal{P}$.

Bien entendu, le principe heuristique de Bloch tel qu'énoncé ici n'est pas rigoureux, puisqu'il ne donne aucune condition sur le type de propriété $\mathcal{P}$ qui intervient. Il n'est donc pas très surprenant que ce principe soit faux tel qu'énoncé. La littérature regorge de contre-exemples, dont le plus connu est certes celui-ci dû à Rubel [21] :

Contre-exemple. Soit $\mathcal{P}$ la propriété pour les fonctions holomorphes f : le polynôme différentiel

$$F(f)(z) := (f'(z) - 1)(f'(z) - 2)(f'(z) - f(z))$$

omet la valeur 0.

Si f est entière et satisfait la propriété $\mathcal{P}$, alors le petit théorème de Picard entraîne que $f'(z) \equiv c$ où c est une constante, et donc $f(z) = cz + d$. Par contre, la condition $(f'(z) - f(z)) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ implique que $c = 0$ et donc f est constante.

D'un autre côté, considérons la famille de fonctions holomorphes

$$\mathcal{F} := \{f_n(z) = nz : z \in \mathbb{D}, n = 3, 4, 5, ...\}.$$

Alors $f_n'(z) = n \neq 1, 2$ et $n - nz \neq 0$ et ce pour tout $z \in \mathbb{D}$, donc chaque $f_n \in \mathcal{F}$ possède la propriété $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{D}$. Or, il est clair que $\mathcal{F}$ n'est pas normale sur $\mathbb{D}$.

Ainsi, le principe de Bloch n'est pas respecté dans ce cas particulier.

5.2 Lemme de Zalcman et principe associé

Malgré l'existence de nombreux contre-exemples, le principe de Bloch semble être respecté dans le cas où la propriété qui intervient est suffisamment régulière. Cette observation mène naturellement à la question suivante : quelles sont exactement les propriétés pour lesquelles le principe de Bloch est respecté ? Existe-il une condition nécessaire ou suffisante ? La méthode de Zalcman, sujet du présent mémoire, fournit une condition suffisante relativement facile à vérifier. Cette approche repose sur le lemme suivant, qui est rapidement devenu un outil central dans l'étude des familles normales de fonctions méromorphes :

Lemme 5.2.1 (Lemme de Zalcman)**.** *Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions méromorphes sur un domaine $D \subseteq \mathbb{C}$. Alors $\mathcal{F}$ n'est pas normale sur D si et seulement s'il existe*

(1) *une suite $(z_k) \subseteq D$,*

(2) *une suite de nombres réels positifs (ρ_k),*

(3) *un point $z_0 \in D$,*

(4) *une suite $(f_k) \subseteq \mathcal{F}$,*

(5) *une fonction méromorphe non constante $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$*

tels que $z_k \to z_0$, $\rho_k \to 0$ et $f_k(z_k + \rho_k z) \to f(z)$ localement uniformément sur $\mathbb{C}$. De plus, f peut être choisie telle que $f^\#(z) \leq 1 = f^\#(0)$, pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Démonstration.
($\Rightarrow$) Supposons que $\mathcal{F}$ n'est pas normale sur D. Par le théorème de Marty (4.3.1), il existe une suite $(\zeta_k) \subseteq D$ qui converge vers un point $\zeta_0 \in D$ et une suite de fonctions $(f_k) \subseteq \mathcal{F}$ telles que $f_k^\#(\zeta_k) \to \infty$. Soit $r > 0$ suffisamment petit pour que $\overline{\mathbb{D}(\zeta_0, r)} \subseteq D$. Pour chaque $k \geq 1$, choisissons z_k satisfaisant $|z_k - \zeta_0| \leq r$ et maximisant la fonction $f_k^\#(z)(r - |z - \zeta_0|)$ sur $\overline{\mathbb{D}(\zeta_0, r)}$, i.e.

$$\max_{|z-\zeta_0| \leq r} f_k^\#(z)(r - |z - \zeta_0|) = f_k^\#(z_k)(r - |z_k - \zeta_0|) := M_k.$$

Pour k suffisamment grand, les ζ_k sont contenus dans le disque fermé $\overline{\mathbb{D}(\zeta_0, r)}$, d'où

$$M_k \geq f_k^\#(\zeta_k)(r - |\zeta_k - \zeta_0|)$$

et donc $M_k \to \infty$ lorsque $k \to \infty$. Quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que $M_k > 0$ pour tout k. Définissons $\rho_k := 1/f_k^\#(z_k)$. Alors

$$\rho_k = \frac{r - |z_k - \zeta_0|}{M_k} \leq \frac{r}{M_k}$$

et donc les ρ_k sont positifs et convergent vers 0. Pour $|z| < (r - |z_k - \zeta_0|)/\rho_k = M_k$, on a

$$|z_k + \rho_k z - \zeta_0| \leq |z_k - \zeta_0| + \rho_k |z| < r$$

et donc les fonctions $g_k(z) := f_k(z_k + \rho_k z)$ sont bien définies pour $|z| < M_k$ et satisfont

$$\begin{aligned} g_k^{\#}(z) &= \rho_k f_k^{\#}(z_k + \rho_k z) \\ &\leq \frac{r - |z_k - \zeta_0|}{M_k} \frac{M_k}{r - |z_k + \rho_k z - \zeta_0|} \\ &\leq \frac{r - |z_k - \zeta_0|}{r - |z_k - \zeta_0| - \rho_k |z|} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{|z|}{M_k}} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Par le critère de Marty (4.3.1), la suite (g_k) est normale sur $\mathbb{C}$ et donc possède une sous-suite qui converge localement χ-uniformément sur $\mathbb{C}$. Quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que $g_k \to f$ pour une certaine fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ et que $z_k \to z_0 \in D$. Comme $g_k^{\#}(0) = 1$ pour tout k, on a $f^{\#}(0) = 1$, donc f est non constante. Notons que par (5.1), on a également $f^{\#}(z) \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que les conditions (1) à (5) sont vérifiées mais que $\mathcal{F}$ est normale. Soit $r > 0$ tel que $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)} \subseteq D$. Par le critère de Marty, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\max_{|z - z_0| \leq r} h^{\#}(z) \leq M \qquad (\forall\, h \in \mathcal{F}).$$

Fixons $\zeta \in \mathbb{C}$. Pour k suffisamment grand, on a $|z_k + \rho_k \zeta - z_0| \leq r$, ce qui entraîne

$$\rho_k f_k^{\#}(z_k + \rho_k \zeta) \leq \rho_k M.$$

On a donc

$$f^{\#}(\zeta) = \lim_{k \to \infty} \rho_k f_k^{\#}(z_k + \rho_k \zeta) = 0.$$

Comme ζ était quelconque, il suit que f est constante, ce qui est une contradiction.

$\square$

Dans le but d'introduire la méthode de Zalcman, on utilisera la notation $\langle f, D \rangle \in \mathcal{P}$ si $f : D \to \mathbb{C}_\infty$ est une fonction méromorphe qui satisfait la propriété $\mathcal{P}$ sur le domaine D. On considère ici qu'une propriété $\mathcal{P}$ est définie tout simplement comme un ensemble de paires $\langle f, D \rangle$, où D est un domaine et f une fonction méromorphe sur D. Le principe heuristique de Bloch affirme donc que les deux énoncés suivants sont équivalents :

(a) Si $\langle f, \mathbb{C} \rangle \in \mathcal{P}$, alors f est constante.

(b) Pour tout domaine $D \subseteq \mathbb{C}$, la famille $\{f : \langle f, D \rangle \in \mathcal{P}\}$ est normale sur D.

On dit que $\mathcal{P}$ est une **propriété de Bloch** si **(a)** et **(b)** sont équivalents. Il pourrait bien sûr arriver que $\mathcal{P}$ soit une propriété de Bloch mais que **(a)** et **(b)** soient faux. Dans le cas où **(a)** et **(b)** sont vrais, on dira que $\mathcal{P}$ est une **propriété de Picard-Montel**.

On peut maintenant énoncer et démontrer le résultat suivant, connu sous le nom de *principe de Zalcman* :

Théorème 5.2.2 (Principe de Zalcman)**.** *Supposons qu'une propriété $\mathcal{P}$ de fonctions méromorphes satisfait les trois conditions suivantes :*

(i) *Si $\langle f, D\rangle \in \mathcal{P}$, alors $\langle f|_{D'}, D'\rangle \in \mathcal{P}$ pour tout domaine $D' \subseteq D$,*

(ii) *Si $\langle f, D\rangle \in \mathcal{P}$ et $\phi(z) := \rho z + c$, où $\rho, c \in \mathbb{C}$ et $\rho \neq 0$, alors $\langle f \circ \phi, \phi^{-1}(D)\rangle \in \mathcal{P}$,*

(iii) *Supposons que $\langle f_n, D_n\rangle \in \mathcal{P}$ pour $n \in \mathbb{N}$, où $D_1 \subseteq D_2 \subseteq D_3 \subseteq \ldots$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \mathbb{C}$. Si $f_n \to f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ localement uniformément sur $\mathbb{C}$, alors $\langle f, \mathbb{C}\rangle \in \mathcal{P}$.*

Alors $\mathcal{P}$ est une propriété de Bloch.

Démonstration.
(a) ⇒ (b)

Supposons qu'il existe un domaine $D \subseteq \mathbb{C}$ pour lequel la famille $\mathcal{F} := \{f : \langle f, D\rangle \in \mathcal{P}\}$ n'est pas normale. En appliquant le lemme de Zalcman, on obtient des suites $(z_k) \subseteq D$, $(\rho_k) \subseteq (0,\infty)$, $(f_k) \subseteq \mathcal{F}$ telles que $z_k \to z_0 \in D$, $\rho_k \to 0$ et $f_k(z_k + \rho_k z) \to f(z)$ localement uniformément sur $\mathbb{C}$, où $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ est une fonction méromorphe non constante. Pour chaque k, posons $\phi_k(z) := z_k + \rho_k z$. Comme chaque f_k satisfait la propriété $\mathcal{P}$ sur D, (ii) entraîne que $\langle f_k \circ \phi_k, \phi_k^{-1}(D)\rangle \in \mathcal{P}$ pour tout k. Maintenant, soit $r > 0$ tel que $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)} \subseteq D$ et pour chaque k, définissons

$$R_k := \frac{r - |z_k - z_0|}{\rho_k}.$$

Alors $R_k \to \infty$ et quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que les R_k sont positifs et croissants. De plus, si $|z| < R_k$, alors

$$|\phi_k(z) - z_0| = |z_k + \rho_k z - z_0| < |z_k - z_0| + \rho_k \frac{r - |z_k - z_0|}{\rho_k} = r$$

et donc $\phi_k(z) \in D$, i.e. $z \in \phi_k^{-1}(D)$. Il suit que $\mathbb{D}(0, R_k) \subseteq \phi_k^{-1}(D)$ et par (i), on a $\langle f_k \circ \phi_k, \mathbb{D}(0, R_k)\rangle \in \mathcal{P}$ pour tout k.

De plus, comme $R_k \to \infty$, on a

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{D}(0, R_k) = \mathbb{C}.$$

Comme $f_k(\phi_k(z)) \to f(z)$ localement uniformément sur $\mathbb{C}$, il suit de (iii) que $\langle f, \mathbb{C}\rangle \in \mathcal{P}$. Mais f est non constante par le lemme de Zalcman, ce qui contredit **(a)**.

(b) $\Rightarrow$ **(a)**

Soit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ une fonction méromorphe avec $\langle g, \mathbb{C}\rangle \in \mathcal{P}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, définissons $g_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ par $g_n(z) := g(nz)$. Comme $\langle g, \mathbb{C}\rangle \in \mathcal{P}$, (ii) entraîne que $\langle g_n, \mathbb{C}\rangle \in \mathcal{P}$ pour tout n. Par **(b)** et le théorème de Marty (4.3.1), il existe une constante M telle que

$$g_n^{\#}(z) \leq M \qquad (z \in \overline{\mathbb{D}}, n \in \mathbb{N}).$$

Fixons $z_0 \in \mathbb{C}$. Soit N tel que $z_0/n \in \mathbb{D}$ pour tout $n \geq N$. On a donc

$$g_n^{\#}(z_0/n) \leq M \qquad (n \geq N)$$

i.e.

$$ng^{\#}(z_0) \leq M \qquad (n \geq N).$$

Donc $g^{\#}(z_0) = 0$. Comme z_0 est quelconque, il suit que g est constante.

□

L'argument utilisé permet de déduire que **(b)** découle non seulement de **(a)**, mais aussi de la condition plus faible suivante :

(c) Si $\langle f, \mathbb{C}\rangle \in \mathcal{P}$ et si la dérivée sphérique de f est bornée, alors f est constante.

En particulier, pour une propriété $\mathcal{P}$ satisfaisant les trois conditions du principe de Zalcman, **(a)**, **(b)** et **(c)** sont équivalents. Ainsi, pour démontrer un résultat concernant des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$, il suffit souvent de considérer uniquement les fonctions dont la dérivée sphérique est bornée. Ce type d'argument est dû à Pang [18], et des exemples sont donnés dans le chapitre 6.

5.3 Principe de Minda

Dans la section précédente, on a introduit le principe de Zalcman, qui affirme que si une propriété $\mathcal{P}$ satisfait certaines conditions de régularité, alors $\mathcal{P}$ est une propriété de Bloch, c'est-à-dire que les deux énoncés suivants sont équivalents :

(a) Si $\langle f, \mathbb{C}\rangle \in \mathcal{P}$, alors f est constante.

(b) Pour tout domaine $D \subseteq \mathbb{C}$, la famille $\{f : \langle f, D\rangle \in \mathcal{P}\}$ est normale sur D.

Dans de nombreux cas, cette approche permet également d'obtenir une preuve que les énoncés **(a)** et **(b)** sont non seulement équivalents, mais également vrais. Cependant, dans certaines situations, l'approche de Zalcman se révèle inefficace pour montrer qu'une propriété de Bloch donnée est en fait une propriété de Picard–Montel. C'est pourquoi on présente également une autre approche, due à Minda [14], qui fournit une condition suffisante sur $\mathcal{P}$ pour que les énoncés **(a)** et **(b)** soient vrais.

On a d'abord besoin de la définition suivante :

Définition. Une propriété $\mathcal{P}$ de fonctions holomorphes est dite $\mathcal{M}$-**normale** si $\mathcal{P}$ satisfait les conditions suivantes :

(1) Si $\langle f, D\rangle \in \mathcal{P}$ et $D' \subseteq D$, alors $\langle f, D'\rangle \in \mathcal{P}$,

(2) Si $\langle f, D\rangle \in \mathcal{P}$ et $\phi(z) := az + b$, $a \neq 0$, alors $\langle f \circ \phi, \phi^{-1}(D)\rangle \in \mathcal{P}$,

(3) Si $\langle f, D\rangle \in \mathcal{P}$ et $c \in \mathbb{C}$, alors $\langle f + c, D\rangle \in \mathcal{P}$,

(4) Supposons que $\langle f_n, D_n\rangle \in \mathcal{P}$ pour $n \in \mathbb{N}$, où $D_1 \subseteq D_2 \subseteq D_3 \subseteq \ldots$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \mathbb{C}$. Si $f_n \to f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ localement uniformément sur $\mathbb{C}$, alors $\langle f, \mathbb{C}\rangle \in \mathcal{P}$,

(5) $\langle I, \mathbb{C}\rangle \notin \mathcal{P}$, où I est la fonction identité.

Notons que les propriétés $\mathcal{M}$-normales satisfont les trois conditions du principe de Zalcman, donc pour de telles propriétés, les énoncés **(a)** et **(b)** sont équivalents. En fait, on a :

Théorème 5.3.1. *Soit $\mathcal{P}$ une propriété $\mathcal{M}$-normale. Alors $\mathcal{P}$ est une propriété de Picard–Montel, i.e. les énoncés suivants sont vrais :*

(a) *Si $\langle f, \mathbb{C}\rangle \in \mathcal{P}$, alors f est constante.*

(b) *Pour tout domaine $D \subseteq \mathbb{C}$, la famille $\{f : \langle f, D\rangle \in \mathcal{P}\}$ est normale sur D.*

La démonstration du théorème utilise le lemme suivant :

Lemme 5.3.2. *Soit f une fonction entière. Alors f n'est pas linéaire si et seulement s'il existe une suite $(z_n) \subseteq \mathbb{C}$, des nombres positifs $\rho_n \to 0$ et une constante unimodulaire A tels que $f(z_n + \rho_n \zeta) - f(z_n) \to A\zeta$ localement uniformément sur $\mathbb{C}$, lorsque $n \to \infty$.*

Démonstration.
($\Leftarrow$) Supposons que $\rho_n \to 0$ et $f(z_n + \rho_n\zeta) - f(z_n) \to A\zeta$ localement uniformément sur $\mathbb{C}$, avec $|A| = 1$. Si f est linéaire, disons $f' \equiv a$ pour une constante a, alors

$$1 = |A| = \lim_{n\to\infty} \rho_n |f'(z_n + \rho_n\zeta)| = |a| \lim_{n\to\infty} \rho_n = 0,$$

ce qui est une contradiction.

($\Rightarrow$) Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, soit w_k avec $|w_k| \leq k$ tel que

$$(k - |w_k|)|f'(w_k)| = M_k := \max_{|w|\leq k}(k - |w|)|f'(w)|.$$

Alors $M_k/k \to \infty$ lorsque $k \to \infty$ car si $|z| \leq k$, alors

$$|f'(z)| \leq \frac{M_k}{k - |z|} = \frac{M_k/k}{1 - |z|/k}$$

et donc si $\liminf_{k\to\infty} M_k/k < +\infty$, alors f' serait bornée sur $\mathbb{C}$ et donc constante par le théorème de Liouville, contredisant l'hypothèse que f n'est pas linéaire. Quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que les M_k sont strictement positifs.

Maintenant, définissons

$$g_k(\zeta) := f(w_k + r_k\zeta) - f(w_k)$$

où $r_k := \frac{k-|w_k|}{M_k} = \frac{1}{|f'(w_k)|}$. Donc $0 < r_k \leq \frac{k}{M_k} \to 0 \qquad (k \to \infty)$. De plus, notons que la suite (g_k') est une suite localement uniformément bornée de fonctions entières. En effet, si $K \subseteq \mathbb{C}$ est compact, prenons k_0 suffisamment grand pour que $K \subseteq \mathbb{D}(0, M_k)$ si $k \geq k_0$. Si $\zeta \in K$, alors

$$w_k + r_k\zeta \in \mathbb{D}(w_k, r_k M_k) = \mathbb{D}(w_k, k - |w_k|) \subseteq \mathbb{D}(0, k)$$

et donc pour tout $k \geq k_0$,

$$\begin{aligned} |g_k'(\zeta)| &= r_k |f'(w_k + r_k\zeta)| \\ &\leq \frac{r_k M_k}{(k - |w_k + r_k\zeta|)} \\ &\leq \frac{k - |w_k|}{k - |w_k| - r_k|\zeta|} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{|\zeta|}{M_k}}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Mais $|\zeta|$ est borné sur K et $M_k \to \infty$, donc la famille $(g_k)_{k\geq 1}$ est normale, par la proposition (3.2.7). Comme $g_k(0) = 0$ pour tout k, on peut supposer que les g_k convergent localement uniformément sur $\mathbb{C}$ vers une fonction entière g, quitte à considérer une sous-suite. Aussi, comme $|g_k'(0)| = 1$ pour tout k, on a $|g'(0)| = 1$. Par (5.2), on obtient

$$|g'(\zeta)| \leq 1 \qquad (\zeta \in \mathbb{C})$$

donc g' est constante par le théorème de Liouville, i.e. $g' \equiv A$ pour une certaine constante A. Comme $g(0) = 0$ et $|g'(0)| = 1$, on a $g(\zeta) = A\zeta$ avec $|A| = 1$. Le résultat suit en prenant (z_n) et (ρ_n) des sous-suites respectives de (w_k) et (r_k).

□

Démonstration du théorème (5.3.1). Notons d'abord que les conditions (2) et (5) entraînent que $\langle \phi, \mathbb{C} \rangle \notin \mathcal{P}$ pour chaque fonction linéaire $\phi(z) = az+b$, $a \neq 0$. Supposons que $\langle f, \mathbb{C} \rangle \in \mathcal{P}$ avec f non constante. Comme f n'est pas linéaire, le lemme implique qu'il existe des suites (z_n) et (ρ_n), avec $\rho_n \to 0$, telles que

$$g_n(\zeta) := f(z_n + \rho_n \zeta) - f(z_n) \to A\zeta =: g(\zeta) \qquad (|A| = 1),$$

localement uniformément sur $\mathbb{C}$. Les conditions (2) et (3) impliquent que $\langle g_n, \mathbb{C} \rangle \in \mathcal{P}$ pour chaque n. Mais alors la condition (4) entraîne que $\langle g, \mathbb{C} \rangle \in \mathcal{P}$, contredisant le fait qu'aucune fonction linéaire ne possède la propriété $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{C}$. On conclut donc que f est constante, ce qui termine la démonstration.

□

Le principe de Minda mène à une observation très intéressante concernant le principe de Bloch, qui repose sur le résultat suivant dû à Picard :

Théorème 5.3.3 (Grand théorème de Picard)**.** *Soit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}_\infty$ distincts, D un domaine du plan, $\zeta \in D$ et $f : D \setminus \{\zeta\} \to \mathbb{C}_\infty$ une fonction méromorphe. Si $f(z) \neq a_j$ pour chaque $j \in \{1, 2, 3\}$ et chaque $z \in D \setminus \{\zeta\}$, alors ζ n'est pas une singularité essentielle de f.*

Le grand théorème de Picard suggère que pour une propriété de Picard-Montel $\mathcal{P}$, il ne devrait pas exister de fonction méromorphe ayant la propriété $\mathcal{P}$ au voisinage d'une singularité essentielle. Autrement dit, pour une propriété $\mathcal{P}$ de fonctions méromorphes, les trois conditions suivantes :

(a) Si $\langle f, \mathbb{C} \rangle \in \mathcal{P}$, alors f est constante.

(b) Pour tout domaine $D \subseteq \mathbb{C}$, la famille $\{f : \langle f, D \rangle \in \mathcal{P}\}$ est normale sur D.

(c) Si $\langle f, \mathbb{C} \rangle \in \mathcal{P}$ et si f a une dérivée sphérique bornée, alors f est constante.

devraient entraîner

(d) Si $\langle f, D\backslash\{\zeta\}\rangle \in \mathcal{P}$ pour un domaine D et un $\zeta \in D$, alors ζ n'est pas une singularité essentielle de f.

Malheureusement, il existe des propriétés de fonctions méromorphes telles que **(a)**, **(b)**, et **(c)** sont respectés mais pas **(d)**, voir [13]. Cependant, le résultat est vrai si l'on se restreint aux propriétés de fonctions holomorphes :

Théorème 5.3.4. *Supposons qu'une propriété $\mathcal{P}$ de fonctions holomorphes satisfait les trois conditions du principe de Zalcman. Alors chacune des conditions* **(a)**, **(b)** *et* **(c)** *implique* **(d)**.

La preuve utilise le résultat suivant, dû à Lehto et Virtanen, dont la preuve apparaît dans [12] :

Lemme 5.3.5. *Supposons qu'une fonction méromorphe f a une singularité essentielle en ζ. Alors*

$$\limsup_{z\to\zeta} |z-\zeta| f^{\#}(z) \geq \frac{1}{2}.$$

Si f est holomorphe, alors

$$\limsup_{z\to\zeta} |z-\zeta| f^{\#}(z) = \infty.$$

Démonstration du théorème (5.3.4). Par hypothèse, les trois conditions du principe de Zalcman sont satisfaites, donc **(a)** et **(b)** sont équivalents. De plus, par la remarque suivant le principe de Zalcman, ces deux conditions sont équivalentes à **(c)**. Supposons donc qu'une de ces conditions (et donc toutes) sont satisfaites et on veut montrer que **(d)** l'est aussi.

Soit $\langle f, D \setminus \{\zeta\}\rangle \in \mathcal{P}$ pour un certain domaine D, un point $\zeta \in D$ et une fonction f holomorphe sur $D \setminus \{\zeta\}$. Supposons que f a une singularité essentielle en ζ. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\zeta = 0 \in D$. Par le lemme (5.3.5), il existe une suite $(c_n) \subseteq D$ avec $c_n \to 0$ et $|c_n| f^{\#}(c_n) \to \infty$. Pour n suffisamment grand, la fonction $f_n(z) := f(c_n + c_n z)$ est holomorphe sur $\mathbb{D}$ et satisfait $f_n^{\#}(0) = |c_n| f^{\#}(c_n) \to \infty$. Par le théorème de Marty (4.3.1), la suite (f_n) n'est pas normale. D'un autre côté, il suit de (i) et (ii) du principe de Zalcman que les f_n ont la propriété $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{D}$. Ceci contredit **(b)**.

$\square$

On conclut cette section en remarquant qu'avec une hypothèse supplémentaire, le théorème (5.3.4) devient également vrai pour les propriétés de fonctions méromorphes :

Théorème 5.3.6. *Supposons qu'une propriété $\mathcal{P}$ de fonctions méromorphes satisfait les trois conditions du principe de Zalcman. Supposons de plus que la condition suivante est respectée :*

(iv) *Si $\langle f, \mathbb{C} \setminus \{0\} \rangle \in \mathcal{P}$, alors $\langle f \circ \exp, \mathbb{C} \rangle \in \mathcal{P}$.*

Alors chacune des conditions **(a)***,* **(b)** *et* **(c)** *implique* **(d)***.*

Démonstration. Notons que **(a)**, **(b)** et **(c)** sont équivalents. Soit $\langle f, D \setminus \{\zeta\} \rangle \in \mathcal{P}$ pour un domaine D et un $\zeta \in D$. On peut encore supposer que $\zeta = 0$. Supposons qu'il s'agit d'une singularité essentielle de f. Par le lemme (5.3.5), il existe une suite $(c_n) \subseteq D$ telle que $c_n \to 0$ et $|c_n| f^{\#}(c_n) \geq 1/4$. Soit $r > 0$ tel que $\mathbb{D}(0, r) \subseteq D$. Définissons $r_n := r/|c_n|$ et $g_n : \mathbb{D}(0, r_n) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}_\infty$ par $g_n(z) := f(c_n z)$. Comme les conditions **(b)**, (i) et (ii) sont satisfaites et $r_n \to \infty$, on peut supposer que $g_n \to g$ localement uniformément pour une certaine fonction $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}_\infty$, quitte à considérer une sous-suite. Comme $|g_n^{\#}(1)| = |c_n| f^{\#}(c_n) \geq 1/4$, on a $g^{\#}(1) \geq 1/4$, donc g est non constante. De plus, par (iii) et (i), $\langle g, \mathbb{C} \setminus \{0\} \rangle \in \mathcal{P}$. Par (iv), $\langle g \circ \exp, \mathbb{C} \rangle \in \mathcal{P}$. Enfin, par **(a)**, $g \circ \exp$ est constante, donc g l'est aussi, ce qui est une contradiction.

$\square$

Chapitre 6

Applications

Ce chapitre contient plusieurs applications de la méthode de Zalcman. En premier lieu, on l'utilise pour obtenir des démonstrations simples du critère fondamental de Montel et du petit théorème de Picard. Ensuite, on présente une introduction à la dynamique complexe et au théorème des cinq îles d'Ahlfors. Plus précisément, la méthode de Zalcman est utilisée pour obtenir une preuve d'une version faible du théorème des cinq îles, ce qui mène à plusieurs résultats intéressants en dynamique complexe, comme le fait que les points périodiques répulsifs sont denses dans l'ensemble de Julia d'une fonction entière transcendante. Enfin, on s'intéresse à la théorie des séries lacunaires, en particulier à une conjecture concernant la normalité d'une famille particulière de telles séries.

6.1 Critère fondamental de Montel et petit théorème de Picard

Tel que vu dans le chapitre précédent, le principe de Zalcman affirme que le principe de Bloch est respecté dans le cas où la propriété qui intervient est suffisamment régulière. Autrement dit, pour une telle propriété, les deux énoncés suivants sont équivalents :

(a) Si $\langle f, \mathbb{C} \rangle \in \mathcal{P}$, alors f est constante.

(b) Pour tout domaine $D \subseteq \mathbb{C}$, la famille $\{f : \langle f, D \rangle \in \mathcal{P}\}$ est normale sur D.

Or, dans certains cas, la méthode de Zalcman permet d'obtenir une preuve simple que **(a)** et **(b)** sont non seulement équivalents, mais également vrais. La démonstration suivante du critère fondamental de Montel illustre à merveille cette affirmation :

Démonstration élémentaire du critère fondamental de Montel.
Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions méromorphes sur un domaine D qui omettent trois points distincts de $\mathbb{C}_\infty$. Supposons que $\mathcal{F}$ n'est pas normale. Sans perte de généralité, on peut supposer que les trois points sont $\{0, 1, \infty\}$ et que D est un disque. Comme chaque $f \in \mathcal{F}$ ne s'annule pas sur D qui est simplement connexe, pour chaque $f \in \mathcal{F}$ et chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction g holomorphe sur D telle que $g^{2^n} = f$. Posons $\mathcal{F}_n$ la famille des telles fonctions g. Remarquons que

$$g^{\#} = \frac{1}{2^n} \frac{|f|^{1/2^n - 1}|f'|}{1 + |f|^{2/2^n}} = \frac{1}{2^n} \frac{|f|^{-1} + |f|}{|f|^{-1/2^n} + |f|^{1/2^n}} f^{\#} \geq \frac{1}{2^n} f^{\#},$$

où l'on a utilisé le fait que si $a > 0$ et $0 < t < 1$, alors $a^{-1} + a \geq a^{-t} + a^t$. Or par le théorème de Marty (4.3.1), la famille $\{f^{\#} : f \in \mathcal{F}\}$ n'est pas localement uniformément bornée et donc pour chaque n fixé, la famille $\{g^{\#} : g \in \mathcal{F}_n\}$ ne l'est pas non plus. En appliquant le théorème de Marty à nouveau, on déduit que $\mathcal{F}_n$ n'est pas normale sur D et ce, pour chaque n.

Maintenant, remarquons que si $g \in \mathcal{F}_n$, alors g omet les valeurs $e^{2\pi ik/2^n}$, $k \in \mathbb{Z}$. Pour chaque n, le lemme de Zalcman donne une fonction entière g_n ne prenant pas les valeurs $e^{2\pi ik/2^n}$ et satisfaisant $g_n^{\#}(z) \leq g_n^{\#}(0) = 1$ pour chaque $z \in \mathbb{C}$. Les g_n forment donc une famille normale et comme $g_n^{\#}(0) = 1$ pour tout n, on a que $g_{n_j} \to G$ localement uniformément sur $\mathbb{C}$, pour une certaine sous-suite $(g_{n_j})_{j \geq 1}$ et une fonction entière non constante G. Par le théorème de Hurwitz, G omet les valeurs $e^{2\pi ik/2^n}$ pour chaque $k, n \in \mathbb{N}$. Mais $G(\mathbb{C})$ est ouvert, donc $|G(z)| \neq 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Par connexité, ou bien $G(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{D}$ ou bien $G(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C} \backslash \mathbb{D}$. Dans le premier cas, G est constante par le théorème de Liouville et dans le second cas, $1/G$ est entière et bornée, donc $1/G$ est constante et G aussi. Dans les deux cas, G est constante, ce qui est une contradiction.

□

Dans la remarque suivant le principe de Zalcman, on a vu que si $\mathcal{P}$ est une propriété de Bloch, alors les énoncés **(a)** et **(b)** du principe de Bloch sont équivalents avec l'énoncé suivant :

(c) Si $\langle f, \mathbb{C} \rangle \in \mathcal{P}$ et si la dérivée sphérique de f est bornée, alors f est constante.

Cette remarque permet d'obtenir une preuve élémentaire du petit théorème de Picard pour les fonctions entières, puisqu'il suffit de démontrer ce dernier dans le cas des fonctions à dérivée sphérique bornée :

Théorème 6.1.1 (Petit théorème de Picard pour les fonctions entières à dérivée sphérique bornée)**.** *Soit $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ distincts et soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière dont la dérivée sphérique est bornée. Si f omet les valeurs a_1 et a_2, alors f est constante.*

On donne deux démonstrations de ce théorème. La première utilise le lemme suivant, dont la preuve est due à Thomas Ransford :

Lemme 6.1.2. *Soit f une fonction entière dont la dérivée sphérique est bornée, disons*

$$\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} \leq M \qquad (z \in \mathbb{C}). \tag{6.1}$$

Alors

$$|f(z)| \leq (1+|f(0)|^2)e^{9M^2|z|^2}.$$

Démonstration. Posons $u := \log(1+|f|^2)$. Un calcul élémentaire montre que

$$\Delta u = \frac{4|f'|^2}{(1+|f|^2)^2}.$$

Soit $r > 0$. Alors f est holomorphe sur un ouvert contenant $\mathbb{D}(0,r)$ et $\Delta u \leq 4M^2$ sur ce disque, donc la fonction $u(z) - M^2|z|^2$ est surharmonique. Par l'inégalité de la moyenne, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta \leq u(0) + M^2r^2.$$

De plus, $\Delta u \geq 0$, donc u est une fonction positive sous-harmonique. Par la formule de Poisson, on a, pour $|z| < r$,

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2} u(re^{i\theta})\, d\theta \leq \frac{r+|z|}{r-|z|}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta \leq \frac{r+|z|}{r-|z|}(u(0)+M^2r^2).$$

En particulier, si $|z| \leq r/3$, alors $u(z) \leq 2(u(0) + M^2r^2)$ et donc

$$\log|f(z)| \leq \frac{1}{2}\log(1+|f(z)|^2) = \frac{u(z)}{2} \leq u(0) + M^2r^2 = \log(1+|f(0)|^2) + M^2r^2.$$

Comme $r \geq 3|z|$ est quelconque, on obtient le résultat avec $r = 3|z|$.

$\square$

Remarquons que ce résultat n'est pas optimal, puisque Clunie et Hayman [8] ont montré que la condition (6.1) entraîne que f est de type exponentiel. Cependant, la preuve est beaucoup plus compliquée et seule la version plus faible (6.1.2) est requise dans le cas qui nous intéresse.

On a également besoin du lemme suivant, inégalité bien connue sur la croissance d'une fonction holomorphe :

Lemme 6.1.3 (Inégalité de Borel–Carathéodory). *Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}(0,R)$, pour $R>0$. Soit $0<r<R$. Alors*

$$\max_{|z|=r}|f(z)| \leq \frac{2r}{R-r}\sup_{|z|\leq R}\Re e f(z) + \frac{R+r}{R-r}|f(0)|.$$

Démonstration du théorème (6.1.1). Sans perte de généralité, on peut supposer que $a_1=0$ et $a_2=1$, car sinon il suffit de considérer la fonction

$$h(z) := \frac{f(z)-a_1}{a_2-a_1}$$

qui est constante si et seulement si f l'est aussi.

Comme f est une fonction entière à dérivée sphérique bornée, il existe une constante $M>0$ telle que

$$\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} \leq M \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Par le lemme (6.1.2), il existe des constantes $A, B > 0$ telles que

$$|f(z)| \leq Ae^{B|z|^2} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Comme f est entière et ne prend pas la valeur 0, il existe une fonction entière g telle que $f=e^g$. L'inégalité précédente devient

$$|e^{g(z)}| \leq Ae^{B|z|^2} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

et donc

$$\Re e\, g(z) \leq \log A + B|z|^2.$$

Par l'inégalité de Borel–Carathéodory, on a

$$\max_{|z|=r}|g(z)| \leq \frac{2r}{R-r}\sup_{|z|\leq R}\Re e\, g(z) + \frac{R+r}{R-r}|g(0)|$$

et donc

$$\max_{|z|=r} |g(z)| \leq \frac{2r}{R-r}(\log A + BR^2) + \frac{R+r}{R-r}|g(0)|, \tag{6.2}$$

ce qui est vrai pour tous r, R tels que $0 < r < R$. Maintenant, si $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, alors la formule de Cauchy entraîne que

$$|a_n| \leq \frac{1}{r^n} \max_{|z|=r} |g(z)|$$

et ce, pour chaque $r > 0$ et chaque $n \in \mathbb{N}$. Avec $R = r + 1$ dans (6.2), on obtient

$$|a_n| \leq \frac{1}{r^n} \Big(2r(\log A + B(r+1)^2) + (2r+1)|g(0)| \Big)$$

ce qui tend vers 0 lorsque $r \to \infty$ si $n \geq 3$. Ainsi, $g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ et $f(z) = e^{a_0 + a_1 z + a_2 z^2}$. Or f ne prend pas la valeur 1, donc nécessairement $a_1 = a_2 = 0$ et f est constante.

□

La seconde démonstration utilise le résultat suivant sur les fonctions à dérivée sphérique bornée, dû à Eremenko [9] :

Lemme 6.1.4. *Soit f une fonction entière satisfaisant*

$$\frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} \leq M \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Alors pour chaque $R > 0$,

$$|f'(z)| \leq \frac{2}{R} \max\{|f(z)|, 1\}(\log^+ |f(z)| + RM).$$

Démonstration. Posons $D := \{z : |f(z)| > 1\}$ et pour chaque $R > 0$, considérons la fonction suivante définie sur D :

$$u_R := \frac{|f'|}{|f|(\log|f| + RM)}.$$

Alors clairement

$$u_R(z) \leq \frac{2}{R} \qquad (z \in \partial D) \tag{6.3}$$

et u_R satisfait

$$\Delta \log u_R \geq u_R^2 \tag{6.4}$$

au sens des distributions. Montrons maintenant le résultat suivant :

Proposition 6.1.5. *Si u est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ positive sur un ouvert $D \subseteq \mathbb{C}$ satisfaisant* (6.3) *et* (6.4)*, alors*

$$u \leq \frac{2}{R}$$

sur D.

Démonstration. Supposons le contraire, disons $u(z_0) > 2/R$ pour un z_0 dans D. Considérons la fonction

$$v(z) := \frac{2R}{R^2 - |z - z_0|^2} \qquad (z \in \mathbb{D}(z_0, R)).$$

Alors clairement

$$v(z) \geq \frac{2}{R} \qquad (z \in \mathbb{D}(z_0, R)) \tag{6.5}$$

et par un calcul direct

$$\Delta \log v = v^2.$$

Considérons

$$K := \{z \in D \cap \mathbb{D}(z_0, R) : u(z) > v(z)\}.$$

On a par hypothèse $u(z_0) > 2/R = v(z_0)$, donc $z_0 \in K$. Soit D_0 la composante de z_0 dans K. On a

$$u(z) = v(z) \qquad (z \in \partial D_0),$$

puisque $u(z) \leq v(z)$ pour $z \in \partial D$, (par (6.3) et (6.5)) et pour $z \in \partial\mathbb{D}(z_0, R)$ (puisque pour ces z on a $v(z) = \infty$).

D'autre part, on a

$$\Delta(\log u - \log v) \geq u^2 - v^2 > 0$$

sur D_0. Ainsi, $\log u - \log v$ est une fonction sous-harmonique positive sur D_0 qui s'annule sur la frontière, ce qui contredit le principe du maximum pour les fonctions sous-harmoniques.

□

Maintenant, en appliquant la proposition à la fonction u_R, on obtient

$$|f'(z)| \leq \frac{2}{R}|f(z)|(\log|f(z)| + RM) \qquad (z \in D).$$

Mais si $z \notin D$, alors $|f(z)| \leq 1$ et

$$|f'(z)| \leq M(1 + |f(z)|^2) \leq 2M.$$

Dans les deux cas,

$$|f'(z)| \leq \frac{2}{R} \max\{|f(z)|, 1\}(\log^+ |f(z)| + RM).$$

□

Corollaire 6.1.6. *Soit f une fonction entière satisfaisant*

$$\frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} \leq M \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Alors

$$|f'(z)| \leq 2M \max\{|f(z)|, 1\}. \tag{6.6}$$

Démonstration. Par le lemme précédent,

$$|f'(z)| \leq \frac{2}{R} \max\{|f(z)|, 1\}(\log^+ |f(z)| + RM)$$

pour chaque $z \in \mathbb{C}$ et chaque $R > 0$. En laissant $R \to \infty$ pour z fixé, on obtient le résultat. □

Corollaire 6.1.7. *Soit f une fonction entière qui ne prend pas la valeur 0. Supposons que*

$$\frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} \leq M \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Alors f est de la forme e^{cz+d} pour des constantes c et d avec $|c| \leq 2M$.

Démonstration. Par le corollaire précédent, on a

$$|f'(z)| \leq 2M \max\{|f(z)|, 1\}. \tag{6.7}$$

Donc, pour $|f| \geq 1$, on a $|f'/f| \leq 2M$. Si $|f| < 1$, alors $|1/f| \geq 1$ et comme les dérivées sphériques de f et $1/f$ sont égales, alors $1/f$ est aussi une fonction entière à dérivée sphérique bornée. En remplaçant f par $1/f$ dans (6.7), on obtient

$$|(1/f)'| \leq 2M|1/f|$$

i.e.

$$|f'/f| \leq 2M.$$

Il suit que f'/f est une fonction entière bornée, donc $f'/f \equiv c$ pour une constante c avec $|c| \leq 2M$. En écrivant $f = e^h$, on obtient $h' \equiv c$ donc $h(z) = cz + d$, et le résultat suit.

$\square$

Démonstration du théorème (6.1.1). On peut supposer que les valeurs omises par f sont 0 et 1 et le résultat suit directement du corollaire précédent.

$\square$

Enfin, on termine cette section par une généralisation du critère fondamental de Montel, dont la démonstration est une autre belle application de la méthode de Zalcman :

Théorème 6.1.8. *Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions méromorphes sur un domaine D. Supposons que chaque $f \in \mathcal{F}$ omet trois valeurs distinctes $a(f), b(f), c(f)$ de $\mathbb{C}_\infty$ satisfaisant*

$$\chi(a(f), b(f)) \cdot \chi(b(f), c(f)) \cdot \chi(c(f), a(f)) \geq \varepsilon$$

pour un certain $\varepsilon > 0$ valable pour chaque $f \in \mathcal{F}$. Alors $\mathcal{F}$ est normale sur D.

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$ et définissons la propriété $\mathcal{P}$ de fonctions méromorphes par $\langle f, D\rangle \in \mathcal{P}$ si f omet trois valeurs distinctes $a(f), b(f), c(f) \in \mathbb{C}_\infty$ satisfaisant

$$\chi(a(f), b(f)) \cdot \chi(b(f), c(f)) \cdot \chi(c(f), a(f)) \geq \varepsilon.$$

Montrons d'abord que les trois conditions du principe de Zalcman (5.2.2) sont respectées :

(i) et (ii) sont clairement satisfaites. Pour (iii), supposons que $f_n \to f$ localement uniformément sur $\mathbb{C}$ et que chaque f_n omet trois points a_n, b_n, c_n satisfaisant

$$\chi(a_n, b_n) \cdot \chi(b_n, c_n) \cdot \chi(c_n, a_n) \geq \varepsilon.$$

On doit montrer que f possède la propriété $\mathcal{P}$. Comme toute fonction constante possède la propriété $\mathcal{P}$, on peut supposer que f est non constante. De plus, par la compacité de la sphère de Riemann, on peut supposer que $\chi(a_n, a) \to 0$, $\chi(b_n, b) \to 0$ et $\chi(c_n, c) \to 0$ pour certains $a, b, c \in \mathbb{C}_\infty$, quitte à considérer une sous-suite. On a donc

$$\chi(a, b) \cdot \chi(b, c) \cdot \chi(c, a) \geq \varepsilon.$$

Il reste à montrer que f omet les valeurs a, b et c. Supposons le contraire, sans perte de généralité f prend la valeur a, disons $f(z_0) = a$. Si $a \neq \infty$, alors sur un certain disque $\mathbb{D}(z_0, r)$, f est holomorphe, avec $f_n - a_n \to f - a$ localement uniformément sur $\mathbb{D}(z_0, r)$. Par le théorème de Hurwitz, comme f est non constante, $f_n - a_n$ a un zéro dans $\mathbb{D}(z_0, r)$ pour n suffisamment grand, ce qui est une contradiction. Si $a = \infty$, $1/f_n \to 1/f$ localement uniformément sur un disque $\mathbb{D}(z_0, r)$ et on obtient une contradiction de la même façon.

Ainsi, le principe de Bloch est respecté pour la propriété $\mathcal{P}$ et il suffit de montrer qu'il n'existe pas de fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ non constante ayant cette propriété. Or cela découle directement du petit théorème de Picard, ce qui complète la démonstration.

$\square$

6.2 Dynamique complexe et théorème des cinq îles d'Ahlfors

6.2.1 Préliminaires sur l'itération des fonctions complexes

Tout au long de cette section, on s'intéresse aux fonctions entières transcendantes ainsi qu'aux fonctions rationnelles de degré plus grand ou égal à 2. Plus précisément, définissons $\text{End}(\mathbb{C})$ et $\text{End}(\mathbb{C}_\infty)$ comme étant respectivement l'ensemble des endormorphismes holomorphes de $\mathbb{C}$ et de $\mathbb{C}_\infty$. Ainsi, $\text{End}(\mathbb{C})$ représente les fonctions entières et $\text{End}(\mathbb{C}_\infty)$, les fonctions rationnelles. Si P dénote l'ensemble des polynômes et $\text{Möb}(\mathbb{C}_\infty)$ l'ensemble des transformations de Möbius, alors les ensembles considérés sont

$$\text{Ent} := \text{End}(\mathbb{C}) \setminus P$$

et

$$\text{Rat} := \text{End}(\mathbb{C}_\infty) \setminus \text{Möb}(\mathbb{C}_\infty).$$

Le **degré** d'une fonction rationnelle R correspond au nombre de racines dans $\mathbb{C}_\infty$ de l'équation $R(z) - a = 0$, comptées en tenant compte de la multiplicité.

Points périodiques

Soit $f \in \text{Ent} \cup \text{Rat}$. Pour $z_0 \in \mathbb{C}$, on définit successivement les **itérés** de z_0 par la relation récursive suivante :

$$f^0(z_0) := z_0$$
$$z_{n+1} := f(z_n) = f(f^n(z_0)) \qquad (n = 0, 1, 2, ...),$$

où $f^n := f \circ f \circ f \circ ... \circ f$, n fois. Remarquons que si $f \in \text{Rat}$, alors $f(\infty)$ est bien défini et on peut considérer les itérés de ∞. Les z_n forment l'**orbite avant** de z_0, notée $Or^+(z_0)$. L'**orbite arrière**, quant à elle, est définie comme étant

$$Or^-(z_0) := \{z \in \mathbb{C}_\infty : f^m(z) = z_0 \,\text{pour un}\, m \geq 0\}.$$

Si $f \in \text{Ent}$, on considère par convention que $Or^+(\infty) = Or^-(\infty) = \{\infty\}$.

Si $f^n(z_0) = z_0$ pour un $n \in \mathbb{N}$, alors on dit que z_0 est un **point périodique de période** n. Si $n = 1$, z_0 est appelé **point fixe**. Si z_0 est un point périodique de période n et si de plus $f^m(z_0) \neq z_0$ pour chaque $0 < m < n$, alors n est appelé **période minimale de** z_0.

Remarquons que si z_0 est un point périodique de période minimale n, alors l'orbite de z_0 est constituée de n points,

$$Or^+(z_0) = \{z_0, f(z_0), ..., f^{n-1}(z_0)\}$$

et est appelée **orbite périodique**. Notons que chaque $z_i \in Or^+(z_0)$ est alors un point fixe de la fonction $f^n(z)$.

Soit z_0 un point périodique de période minimale n. La stabilité de z_0 est caractérisée en considérant la **valeur propre** $\lambda = \lambda_{z_0} := (f^n)'(z_0)$ (ou $\frac{1}{(f^n)'(z_0)}$ si $f \in \text{Rat}$ et si $z_0 = \infty$). Par la règle de dérivation en chaîne, on a, pour $z_0 \in \mathbb{C}$, $\lambda = f'(z_0)f'(z_1)...f'(z_{n-1})$, donc λ a la même valeur en chaque point d'une orbite périodique. Similairement pour $z_0 = \infty$.

On distingue différents cas possibles :

(1) $0 < |\lambda| < 1$: z_0 est appelé **point périodique attractif**.

(2) $\lambda = 0$: z_0 est appelé **point périodique superattractif**.

(3) $|\lambda| > 1$: z_0 est appelé **point périodique répulsif**.

(4) $|\lambda| = 1$: z_0 est appelé **point périodique indifférent**.

La nature des points périodiques joue un rôle très important dans l'étude du comportement d'un système dynamique complexe.

Existence des points périodiques

La question suivante survient naturellement lors de l'étude de l'itération des fonctions rationnelles ou entières transcendantes : chaque $f \in \mathrm{Ent} \cup \mathrm{Rat}$ possède-t-elle des points périodiques de période n (pas nécessairement minimale) et ce, pour chaque n ?

Il est clair que si $f \in \mathrm{Rat}$, la réponse est oui. Notons qu'une fonction $f \in \mathrm{Rat}$ ne possède pas nécessairement de point périodique de période *minimale* n pour chaque n, comme le montre la fonction $f(z) := z^2 - z$ qui n'a pas de point périodique de période minimale 2 (chaque point périodique de f de période 2 est fixé par f).

Par contre, pour ce qui est des fonctions de Ent, la réponse est non en général, comme le montre $f(z) := e^z + z$ qui n'a pas de point fixe. Or, on a le résultat suivant, dû à Rosenbloom [20] :

Théorème 6.2.1. *Soit $f \in \mathrm{Ent}$. Alors pour chaque $n \geq 2$, f a une infinité de points périodiques de période n.*

La démonstration du théorème précédent fait appel à la théorie de Nevanlinna sur la distribution des valeurs des fonctions entières, qui est en dehors du cadre du présent mémoire. On réfère donc le lecteur à [20] et à [4] pour de plus amples détails.

Ensembles de Fatou et de Julia

On définit l'**ensemble de Julia** d'une fonction $f \in \mathrm{Ent} \cup \mathrm{Rat}$ par

$$J_f := \{\zeta \in \mathbb{C}_\infty : (f^n)_{n \geq 1} \text{ n'est pas normale en } \zeta\}.$$

Notons que si $f \in \mathrm{Ent}$, alors f n'est pas définie au point ∞ et on considère par convention que $\infty \in J_f$. On dénote le complément de l'ensemble de Julia par $F_f := \mathbb{C}_\infty \setminus J_f$, et F_f est appelé **ensemble de Fatou**.

Il découle directement de la définition que F_f est ouvert et que J_f est fermé.

Exemple. Considérons $f(z) := z^2$. Si $|z_0| < 1$, alors sur chaque disque $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)} \subseteq \mathbb{D}$, la suite $(f^n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers la fonction identiquement nulle, donc $\mathbb{D} \subseteq F_f$. Similairement, $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \subseteq F_f$, où la fonction limite est identiquement ∞. Pour $|z_0| = 1$, il n'existe aucun disque autour de z_0 sur lequel $(f^n)_{n \geq 1}$ est normale, ce qui entraîne $J_f = \mathbb{T}$.

Le résultat suivant décrit l'invariance par itération des ensembles de Fatou et de Julia :

Proposition 6.2.2. *Soit* $f \in \mathrm{Ent} \cup \mathrm{Rat}$ *et soit* n *un entier quelconque. Alors* $F_f = F_{f^n}$ *et* $J_f = J_{f^n}$.

Démonstration. La preuve pour les fonctions entières transcendantes est identique à celle pour les fonctions rationnelles, que l'on retrouve dans [3], p. 51. □

On aura également besoin de la proposition suivante :

Proposition 6.2.3. *Soit* $f \in \mathrm{Ent} \cup \mathrm{Rat}$ *et soit* $z_0 \in \mathbb{C}$.
(1) *Si* z_0 *est un point périodique (super) attractif, alors* $z_0 \in F_f$.
(2) *Si* z_0 *est un point périodique répulsif, alors* $z_0 \in J_f$.
De plus, si $f \in \mathrm{Rat}$, *alors les énoncés* **(1)** *et* **(2)** *sont vrais avec* $z_0 = \infty$.

Démonstration.
(1) Supposons d'abord que z_0 est un point fixe (super) attractif de f. Alors sur un disque suffisamment petit $\mathbb{D}(z_0, r)$, on a

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| < \sigma,$$

pour un certain $0 < \sigma < 1$, donc $|f(z) - f(z_0)| = |f(z) - z_0| < \sigma|z - z_0| < \sigma r$. Il suit que $f(z) \in \mathbb{D}(z_0, r)$ et on peut appliquer successivement le même raisonnement en remplaçant z par $f(z)$. On obtient :

$$|f^n(z) - z_0| < \sigma^n r \qquad (n = 1, 2, 3, ...).$$

Ceci entraîne que $(f^n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers z_0 sur $\mathbb{D}(z_0, r)$, donc $z_0 \in F_f$.

(2) Supposons que z_0 est un point fixe répulsif de f. Alors $|f'(z_0)| > 1$ et par la règle de dérivation en chaîne,

$$|(f^n)'(z_0)| = |f'(z_0)|^n \to \infty \qquad (n \to \infty).$$

Supposons maintenant que $z_0 \in F_f$. Alors la suite des itérés $(f^n)_{n\geq 1}$ est normale sur un disque $\mathbb{D}(z_0, r)$ autour de z_0, donc il existe une sous-suite $(f^{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge localement χ-uniformément sur $\mathbb{D}(z_0, r)$, disons vers g. Or, $f^{n_k}(z_0) = z_0$ pour tout k, donc $g(z_0) = z_0 \neq \infty$ et g est holomorphe sur un voisinage suffisamment petit de z_0. Mais la convergence localement uniforme entraîne que

$$|g'(z_0)| = \lim_{k\to\infty} |(f^{n_k})'(z_0)| = |f'(z_0)|^{n_k} \to \infty \qquad (k \to \infty),$$

ce qui est une contradiction. Ainsi, $z_0 \in J_f$.

Maintenant, si $z_0 = \infty$ et $f \in \text{Rat}$, il suffit de remplacer f par $M \circ f \circ M^{-1}$, où M est une transformation de Möbius ne fixant pas ∞.

Enfin, le cas où z_0 est périodique et non fixe découle directement de (6.2.2).

□

Propriétés de l'ensemble de Julia

On s'intéresse maintenant aux différentes propriétés de l'ensemble de Julia. Tout d'abord, on a

Théorème 6.2.4. *Soit* $f \in \text{Ent} \cup \text{Rat}$. *Alors*

(1) *L'ensemble de Julia est **invariant**, c'est-à-dire que* $f(J_f) \subseteq J_f$ *et* $f^{-1}(J_f) \subseteq J_f$.

(2) *Si* J_f *contient un point intérieur, alors* $J_f = \mathbb{C}_\infty$.

Démonstration.
(1) Soit $\zeta \in J_f$ et posons $\zeta_1 := f(\zeta) \in f(J_f)$. Si $(f^n)_{n\geq 1}$ est normale en ζ_1, alors $(f^{n+1})_{n\geq 1}$ est normale en ζ, ce qui est une contradiction car on a supposé que $\zeta \in J_f$. Donc $\zeta_1 \in J_f$ et $f(J_f) \subseteq J_f$. Maintenant, soit ζ_{-1} tel que $f(\zeta_{-1}) \in J_f$. Si $(f^n)_{n\geq 1}$ est normale en ζ_{-1}, alors $(f^{n-1})_{n\geq 1}$ est normale en $f(\zeta_{-1})$, ce qui est une contradiction car on a supposé que $f(\zeta_{-1}) \in J_f$. Donc $\zeta_{-1} \in J_f$ et $f^{-1}(J_f) \subseteq J_f$.

(2) Supposons que J_f contient un point intérieur a. Soit donc $\mathbb{D}(a,r)$ un disque ouvert autour de a avec $\mathbb{D}(a,r) \subseteq J_f$. Alors la famille $(f^n)_{n\geq 1}$ n'est pas normale sur $\mathbb{D}(a,r)$, donc $\bigcup_{n\geq 1} f^n(\mathbb{D}(a,r))$ contient $\mathbb{C}_\infty$ en entier sauf au plus deux points, par le critère fondamental de Montel (4.2.2). Le résultat découle ensuite du fait que $\bigcup_{n\geq 1} f^n(\mathbb{D}(a,r)) \subseteq J_f$ par invariance et que J_f est fermé.

□

Notons que l'ensemble de Fatou possède également la propriété d'invariance. Pour ce qui est de **(2)**, remarquons que le cas $J_f = \mathbb{C}_\infty$ est possible autant pour $f \in \text{Ent}$ que pour $f \in \text{Rat}$. Un exemple de fonction rationnelle ayant $\mathbb{C}_\infty$ comme ensemble de Julia est $R(z) := (z-2)^2/z^2$ (voir [3], p.271). Le premier exemple d'une fonction entière ayant cette propriété est dû à Baker [2], qui a montré que l'ensemble de Julia de la fonction $f(z) := \lambda z e^z$ est $\mathbb{C}_\infty$ pour une constante λ bien choisie. Quelques années plus tard, Misiurewicz [15] publia une preuve que l'ensemble de Julia de e^z est $\mathbb{C}_\infty$, démontrant ainsi une conjecture de Fatou [10], p.370.

On termine cette sous-section avec la propriété suivante de l'ensemble de Julia :

Théorème 6.2.5. *Soit* $f \in \mathrm{Ent} \cup \mathrm{Rat}$. *Alors* J_f *est non-vide et parfait, i.e. égal à l'ensemble de ses points d'accumulation.*

Avant d'entamer la démonstration du théorème, on a d'abord besoin de la définition et du lemme suivants :

Définition. *Soit* $f \in \mathrm{Ent} \cup \mathrm{Rat}$. *Un point* $w \in \mathbb{C}_\infty$ *est appelé* ***point exceptionnel*** *de* f *si l'orbite arrière* $Or^-(w)$ *est finie.*

Lemme 6.2.6. *Soit* $f \in \mathrm{Ent} \cup \mathrm{Rat}$.

(1) *Si* $f \in \mathrm{Ent}$, *alors* f *a au plus un point exceptionnel dans* $\mathbb{C}$.

(2) *Si* $f \in \mathrm{Rat}$, *alors* f *a au plus deux points exceptionnels dans* $\mathbb{C}_\infty$ *et ces points appartiennent à* F_f.

Démonstration. On se contente de démontrer le point **(1)**, voir [17], p.67, pour une preuve de **(2)**. Remarquons d'abord que si w est un point exceptionnel de $f \in \mathrm{Ent}$, alors en particulier il n'existe qu'un nombre fini de $z \in \mathbb{C}$ satisfaisant $f(z) = w$. Ainsi, si f a deux points exceptionnels dans $\mathbb{C}$, disons w_0 et w_1, alors f ne prend pas les valeurs w_0 et w_1 sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$, pour R suffisamment grand. La fonction $g(z) := f(1/z)$ est donc une fonction holomorphe sur le disque privé de l'origine $\{z : 0 < |z| < 1/R\}$ ayant une singularité essentielle en 0 (rappelons que f est transcendante) et ne prenant pas les valeurs w_0 et w_1. Ceci contredit le grand théorème de Picard (5.3.3). Ainsi, f a au plus un point exceptionnel dans $\mathbb{C}$.

□

Démonstration du théorème (6.2.5).
Montrons d'abord que J_f est non vide et, en fait, infini.

Supposons que $f \in \mathrm{Rat}$. Si J_f est vide, alors la suite des itérées $(f^n)_{n\geq 1}$ est normale sur $\mathbb{C}_\infty$ et donc il existe une fonction ϕ ainsi qu'une sous-suite $(f^{n_j})_{j\geq 1}$ telles que $f^{n_j} \to \phi$ localement χ-uniformément sur $\mathbb{C}_\infty$. Il suit que ϕ est analytique sur la sphère de Riemann, donc ϕ est rationnelle ou constante (finie ou infinie). Soit $a \neq \infty$ une valeur quelconque prise par ϕ si ϕ n'est pas constante, et prenons $a \neq \phi(z)$ si cette dernière est constante. Si ϕ est de degré k ($k = 0$ si ϕ est constante), alors l'équation $\phi(z) - a = 0$ possède exactement k solutions et le théorème de Hurwitz nous assure qu'il en est de même pour l'équation $f^{n_j}(z) - a = 0$, pour j suffisamment grand. Ainsi, $\deg(f^{n_j}) \to k = \deg(\phi)$ lorsque $j \to \infty$, mais

$$\deg(f^{n_j}) = \deg(f)^{n_j} \to +\infty$$

puisque $\deg(f) \geq 2$ (où l'on a utilisé le fait que $\deg(g \circ h) = \deg(g)\deg(h)$ si g et h appartiennent à Rat). Ceci est une contradiction et on conclut J_f est non vide. Maintenant, soit $z_0 \in J_f$. Par la propriété d'invariance,

$$Or^{-}(z_0) = \{z \in \mathbb{C}_\infty : f^m(z) = z_0 \,\text{pour un}\, m \geq 0\} \subseteq J_f.$$

Or, $Or^{-}(z_0)$ est nécessairement infini car en vertu du lemme (6.2.6), les points exceptionnels d'une fonction de Rat appartiennent à l'ensemble de Fatou. Par conséquent, J_f est infini.

Malheureusement, la méthode précédente ne se généralise pas pour les fonctions entières transcendantes. Si $f \in$ Ent, on procède donc comme suit. Posons $g := f^2$ et supposons que J_g est fini, disons $J_g = \{\infty, z_1, z_2, \ldots, z_k\}$. Par le théorème (6.2.1), g a une infinité de points fixes. Par hypothèse, J_g ne contient qu'un nombre fini de ces points fixes. Soit donc p, q deux points fixes distincts de g avec $p, q \in F_g$. Remarquons que la suite des itérés $(g^n)_{n\geq 1}$ est normale sur F_g, par définition de l'ensemble de Fatou. De plus, le fait que F_g contienne deux points fixes distincts nous assure que chaque fonction limite est non constante. Soit donc $(g^{n_j})_{j\geq 1}$ une sous-suite et $\phi : F_g \to \mathbb{C}$ non constante telles que $g^{n_j} \to \phi$ localement χ-uniformément sur F_g. La normalité de $(g^n)_{n\geq 1}$ nous assure que $(g^{n_{j+1}-n_j})_{j\geq 1}$ converge localement χ-uniformément sur F_g, disons vers h, quitte à considérer une sous-suite. Or, on a nécessairement $h \circ \phi = \phi$ sur F_g, donc $h(z) \equiv z$ par le principe de l'application ouverte et le principe d'identité (notons que F_g est connexe puisque J_g est fini). Ainsi, $g^{n_{j+1}-n_j}(z) \to z$ localement χ-uniformément, ce qui entraîne que g est un automorphisme de $F_g = \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$. En particulier, g est injective au voisinage de ∞, ce qui contredit le grand théorème de Picard. Ainsi, J_g est infini et donc J_f aussi, puisque $J_f = J_{f^2} = J_g$ par la proposition (6.2.2).

On peut maintenant montrer que J_f est parfait de la façon suivante. Soit $w_0 \in J_f$ et soit N un voisinage quelconque de w_0. Notons que $J_f \setminus Or^{+}(w_0)$ contient au moins trois points distincts, disons w_1, w_2, w_3. En effet, si $Or^{+}(w_0)$ est fini, alors $J_f \setminus Or^{+}(w_0)$ est infini et contient clairement trois points distincts. Supposons donc que $Or^{+}(w_0)$ est infini.

(1) Si $f \in$ Rat, alors le lemme (6.2.6) nous assure que w_0 n'est pas un point exceptionnel de f, puisque $w_0 \in J_f$. Il suit que l'orbite arrière $Or^{-}(w_0)$ est infinie. Or,

$Or^-(w_0) \subseteq J_f \setminus Or^+(w_0)$ puisque s'il existe un $w \in \mathbb{C}_\infty$ avec $f^m(w) = w_0$ et $f^n(w_0) = w$ pour des $m, n \in \mathbb{N}$, alors $f^{m+n}(w_0) = w_0$, contredisant le fait que l'orbite avant de w_0 était supposée infinie.

(2) Si $f \in$ Ent, alors le lemme (6.2.6) entraîne qu'au moins un des deux points distincts w_0 et $f(w_0)$ n'est pas exceptionnel. Dans les deux cas, $J_f \setminus Or^+(w_0)$ est infini puisque le même argument qu'en **(1)** montre que $Or^-(w_0) \subseteq J_f \setminus Or^+(w_0)$ et $Or^-(f(w_0)) \subseteq J_f \setminus Or^+(w_0)$.

Soit donc $w_1, w_2, w_3 \in J_f \setminus Or^+(w_0)$. Comme $(f^n|_N)_{n\geq 1}$ n'est pas normale, le critère fondamental de Montel (4.2.2) entraîne qu'il existe un $j \in \{1, 2, 3\}$ tel que

$$w_j \in \bigcup_{n\geq 1} f^n(N).$$

Donc $Or^-(w_j) \cap (N \setminus \{w_0\}) \neq \emptyset$ et en particulier, $J_f \cap (N \setminus \{w_0\}) \neq \emptyset$. Il suit que w_0 est un point d'accumulation de J_f. Ainsi, J_f est inclus dans l'ensemble de ses points d'accumulation. L'inclusion inverse découle directement du fait que J_f est fermé.

$\square$

6.2.2 Théorème des cinq îles d'Ahlfors

La première véritable application du théorème des cinq îles d'Ahlfors en dynamique complexe est due à Baker [1], qui utilisa ce résultat pour montrer que les points périodiques répulsifs sont denses dans l'ensemble de Julia d'une fonction entière transcendante. Par la suite, on découvrit plusieurs autres applications intéressantes du théorème d'Ahlfors, comme par exemple de nouvelles preuves de résultats concernant la dimension de Hausdorff de l'ensemble de Julia ou encore l'existence de composantes singleton dans l'ensemble de Julia d'une fonction entière. Pour un survol des applications du théorème des cinq îles d'Ahlfors en dynamique complexe, on réfère le lecteur à [6].

Avant d'énoncer le théorème des cinq îles, quelques définitions préalables sont de mise.

Soit $D_1, D_2, ..., D_5$ des domaines de Jordan sur $\mathbb{C}_\infty$ (c'est-à-dire des domaines dont la frontière est une courbe simple et fermée) de fermetures mutuellement disjointes. Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine. On dit qu'une fonction méromorphe $f : D \to \mathbb{C}_\infty$ satisfait la propriété $\mathcal{P}(D_1, ..., D_5)$ sur D si aucun sous-domaine de D n'est envoyé conformément sur un des D_j par f. Dans ce cas, on écrit $\langle f, D\rangle \in \mathcal{P}(D_1, ..., D_5)$, selon la notation habituelle de la méthode de Zalcman.

On peut maintenant énoncer deux versions du théorème des cinq îles d'Ahlfors :

Théorème 6.2.7 (Première version du théorème des cinq îles d'Ahlfors)**.**
Pour tout domaine $D \subseteq \mathbb{C}$*, la famille* $\{f : \langle f, D\rangle \in \mathcal{P}(D_1, ..., D_5)\}$ *est normale.*

Théorème 6.2.8 (Deuxième version du théorème des cinq îles d'Ahlfors)**.**
Si $\langle f, \mathbb{C}\rangle \in \mathcal{P}(D_1, ..., D_5)$*, alors* f *est constante.*

Notons que pour tout domaine D, la famille $\{f : \langle f, D\rangle \in \mathcal{P}(D_1, ..., D_5)\}$ contient toutes les fonctions constantes sur D.

C'est en 1935 qu'Ahlfors démontra le théorème des cinq îles, en utilisant la théorie des surfaces de revêtement qui porte maintenant son nom. Bergweiler [5] a récemment publié une nouvelle preuve comportant deux parties : la première démontre le résultat dans le cas particulier où les D_j sont des disques, et la seconde explique comment déduire de ceci le cas général. Cette deuxième partie est beaucoup plus compliquée : elle utilise entre autres la théorie des applications quasi-conformes et l'existence de solutions à l'équation de Beltrami. Par contre, la première partie est beaucoup plus simple et n'utilise essentiellement que le lemme de Zalcman pour les familles normales. Ainsi, la méthode de Zalcman permet de démontrer une version faible du théorème des cinq îles d'Ahlfors, dans laquelle les domaines D_j considérés sont des disques suffisamment petits. Or, il s'avère que cette version faible suffit pour plusieurs applications intéressantes en dynamique complexe, comme on le verra dans la section (6.2.5).

Énonçons maintenant la version faible du théorème des cinq îles d'Ahlfors :

Fixons $a_1, a_2, ..., a_5 \in \mathbb{C}$ et notons $\mathbb{D}_j(\varepsilon) := \mathbb{D}(a_j, \varepsilon)$ pour $j \in \{1, 2, ..., 5\}$.

Théorème 6.2.9 (Première version faible du théorème des cinq îles d'Ahlfors)**.**
Il existe un $\varepsilon > 0$ *tel que la famille* $\{f : \langle f, D\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{D}_1(\varepsilon), \mathbb{D}_2(\varepsilon), ..., \mathbb{D}_5(\varepsilon))\}$ *est normale.*

Théorème 6.2.10 (Deuxième version faible du théorème des cinq îles d'Ahlfors)**.**
Il existe un $\varepsilon > 0$ *tel que si* $\langle f, \mathbb{C}\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{D}_1(\varepsilon), \mathbb{D}_2(\varepsilon), ..., \mathbb{D}_5(\varepsilon))$*, alors* f *est constante.*

Remarquons que le théorème (6.2.9) affirme en fait qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $0 < \delta < \varepsilon$, la famille $\{f : \langle f, D\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{D}_1(\delta), \mathbb{D}_2(\delta), ..., \mathbb{D}_5(\delta))\}$ est normale. En effet, si $0 < \delta < \varepsilon$, on a

$$\{f : \langle f, D\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{D}_1(\delta), \mathbb{D}_2(\delta), ..., \mathbb{D}_5(\delta))\} \subseteq \{f : \langle f, D\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{D}_1(\varepsilon), \mathbb{D}_2(\varepsilon), ..., \mathbb{D}_5(\varepsilon))\}$$

puisque s'il existe un j et un domaine $U \subseteq D$ tel que $f|_U : U \to \mathbb{D}_j(\varepsilon)$ est conforme, alors $V := (f|_U)^{-1}(\mathbb{D}_j(\delta))$ est un sous-domaine de D tel que $f|_V : V \to \mathbb{D}_j(\delta)$ est conforme.

De même, le théorème (6.2.10) affirme qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $0 < \delta < \varepsilon$, la famille $\{f : \langle f, \mathbb{C}\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{D}_1(\delta), \mathbb{D}_2(\delta), ..., \mathbb{D}_5(\delta))\}$ ne contient que les fonctions constantes.

On donne la preuve des théorèmes (6.2.9) et (6.2.10) dans la prochaine sous-section.

6.2.3 Preuve de la version faible du théorème des cinq îles d'Ahlfors

Introduisons d'abord quelques définitions :

Définition. *Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $\alpha \in \mathbb{C}_\infty$ et $f : D \to \mathbb{C}_\infty$ une fonction méromorphe. On dit que f a un* α**-point simple** *s'il existe dans D un zéro d'ordre 1 de la fonction $f(z) - \alpha$, dans le cas où $\alpha \neq \infty$, ou encore s'il existe dans D un pôle d'ordre 1, dans le cas où $\alpha = \infty$. Si f n'a pas de α-point simple, alors on dit que α est une valeur* **totalement ramifiée***, ce qui est équivalent à*

$$(f - \alpha)^{-1}(\{0\}) \subseteq (f')^{-1}(\{0\})$$

si $\alpha \neq \infty$.

Maintenant, soit $a_1, a_2, ..., a_5 \in \mathbb{C}_\infty$ distincts. On dit qu'une fonction f méromorphe sur D a la propriété $\mathcal{P}(a_1, ..., a_5)$ sur ce domaine s'il n'existe pas de $j \in \{1, 2, ..., 5\}$ tel que f a un a_j-point simple, i.e. si chaque a_j est une valeur totalement ramifiée de f. On note par $\mathcal{F}(D, \{a_j\}_{j=1}^5)$ la famille de toutes les fonctions méromorphes sur D et qui ont la propriété $\mathcal{P}(a_1, ..., a_5)$ sur ce domaine. Remarquons que $\mathcal{F}(D, \{a_j\}_{j=1}^5)$ contient toutes les fonctions constantes sur D. De plus, on a le résultat suivant sur la normalité de la famille $\mathcal{F}(D, \{a_j\}_{j=1}^5)$:

Théorème 6.2.11.
$\mathcal{P}(a_1, ..., a_5)$ *est une propriété de Bloch.*

Démonstration. Montrons que les trois conditions du principe de Zalcman (5.2.2) sont respectées :
(i) Soit $\langle f, D\rangle \in \mathcal{P}(a_1, ..., a_5)$ et soit D' un sous-domaine de D. Si $\langle f|_{D'}, D'\rangle \notin \mathcal{P}(a_1, ..., a_5)$, alors il existe un $j \in \{1, 2, ..., 5\}$ tel que f a un a_j-point simple. Si $a_j \neq \infty$, alors $f(z) - a_j$ a un zéro d'ordre 1 dans D'. Or $D' \subseteq D$, ce qui entraîne nécessairement que $\langle f, D\rangle \notin \mathcal{P}(a_1, ..., a_5)$, une contradiction. De même, si $a_j = \infty$, alors f a un pôle d'ordre 1 contenu dans D' et donc dans D, ce qui est également une contradiction. Il suit que $\langle f|_{D'}, D'\rangle \in \mathcal{P}(a_1, ..., a_5)$.

(ii) Soit $\langle f, D\rangle \in \mathcal{P}(a_1, ..., a_5)$ et soit $\phi(z) := \rho z + c$, avec $\rho, c \in \mathbb{C}$ et $\rho \neq 0$. Supposons que $\langle f \circ \phi, \phi^{-1}(D)\rangle \notin \mathcal{P}(a_1, ..., a_5)$. Alors il existe un j tel que $f \circ \phi$ a un a_j-point simple. Si $a_j \neq \infty$, cela signifie que $(f \circ \phi)(z) - a_j$ a un zéro d'ordre 1 dans $\phi^{-1}(D)$. Soit donc $z_0 \in \phi^{-1}(D)$ avec $(f \circ \phi)(z_0) = a_j$ et $(f \circ \phi)'(z_0) \neq 0$. Alors f prend la valeur a_j en $\phi(z_0) \in D$ et par la règle de dérivation en chaîne,

$$(f \circ \phi)'(z_0) = f'(\phi(z_0))\phi'(z_0)$$

donc $f'(\phi(z_0)) \neq 0$. Il suit que $\langle f, D\rangle \notin \mathcal{P}(a_1, ..., a_5)$, une contradiction.

Maintenant, si $a_j = \infty$, soit $z_0 \in \phi^{-1}(D)$ un pôle d'ordre 1 de la fonction $f \circ \phi$. Il suit que z_0 est un zéro d'ordre 1 de la fonction $1/(f \circ \phi)$ et donc $\left(\frac{1}{f\circ\phi}\right)'(z_0) \neq 0$. Or,

$$\left(\frac{1}{f \circ \phi}\right)'(z_0) = \frac{-1}{(f(\phi(z_0)))^2}(f\circ\phi)'(z_0) = \frac{-1}{(f(\phi(z_0)))^2}f'(\phi(z_0))\phi'(z_0) = \left(\frac{1}{f}\right)'(\phi(z_0))\phi'(z_0),$$

donc nécessairement $\left(\frac{1}{f}\right)'(\phi(z_0)) \neq 0$ et $\phi(z_0)$ est un zéro d'ordre 1 de la fonction $1/f$. Ceci équivaut à dire que $\phi(z_0)$ est un pôle d'ordre 1 de f, donc $\langle f, D\rangle \notin \mathcal{P}(a_1, ..., a_5)$, une contradiction.

Dans les deux cas, on obtient une contradiction, donc $\langle f \circ \phi, \phi^{-1}(D)\rangle \in \mathcal{P}(a_1, ..., a_5)$.

(iii) Soit $\langle f_n, D_n\rangle \in \mathcal{P}(a_1, ..., a_5)$, où $D_1 \subseteq D_2 \subseteq \dots$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \mathbb{C}$, avec $f_n \to f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ localement uniformément sur $\mathbb{C}$. Supposons que $\langle f, \mathbb{C}\rangle \notin \mathcal{P}(a_1, ..., a_5)$. Alors il existe un $j \in \{1, 2, \dots, 5\}$ tel que f prend la valeur a_j en un certain point z_0, avec $f'(z_0) \neq 0$ dans le cas où $a_j \neq \infty$. Comme $\langle f, \mathbb{C}\rangle \notin \mathcal{P}(a_1, ..., a_5)$, alors f est nécessairement non constante et le théorème d'Hurwitz nous assure que pour n assez grand, $f_n(z) - a_j$ a un zéro d'ordre 1 dans D_n, ce qui est une contradiction.

Si $a_j = \infty$, il suffit d'appliquer le même argument en remplaçant f par $1/f$ pour obtenir une contradiction.

$\square$

Le prochain théorème affirme encore davantage :

Théorème 6.2.12. $\mathcal{P}(a_1, ..., a_5)$ *est une propriété de Picard-Montel.*

La démonstration requiert la généralisation suivante du lemme de Schwarz :

Lemme 6.2.13 (Lemme de Schwarz pour les racines carrés)**.** *Soit F une fonction holomorphe sur le disque unité $\mathbb{D}$. Supposons que F ne possède que des zéros multiples et que $|F(z)| < 1$ pour $|z| < 1$. Alors*

$$|F'(0)|^2 \leq 4|F(0)|.$$

Démonstration. On peut supposer que F est non constante. Posons $G(z) := F(rz)$, pour $0 < r < 1$. Alors G est holomorphe sur un ouvert contenant le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$ et $|G(z)| < 1$ pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Définissons

$$u(z) := \log \frac{|G'(z)|}{2\sqrt{|G(z)|}(1 - |G(z)|)}$$

et

$$v(z) := \log \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Alors $u(z) \to -\infty$ lorsque z tend vers un zéro de G de multiplicité supérieure ou égale à 3, mais u est de classe C^∞ en tout autre point du disque unité fermé, incluant les zéros doubles de G (rappelons que G, tout comme F, n'a que des zéros multiples). Aussi, $v(z) \to +\infty$ lorsque $|z| \to 1$. Ainsi, la fonction $w := u - v$ est semi-continue supérieurement sur $\overline{\mathbb{D}}$ qui est compact, donc elle atteint un maximum en un certain point, disons z_0. Or, nécessairement $z_0 \in \mathbb{D}$ et w est de classe C^∞ en z_0, puisque w vaut $-\infty$ sur $\partial\mathbb{D}$ et en chaque zéro de G de multiplicité supérieure ou égale à 3. Par conséquent, $\Delta w(z_0) \leq 0$ et un calcul direct permet d'obtenir :

$$\Delta u = 4e^{2u}$$

et

$$\Delta v = 4e^{2v}.$$

Ainsi,

$$\Delta w(z_0) = 4(e^{2u(z_0)} - e^{2v(z_0)}) \leq 0$$

et donc $u(z_0) \leq v(z_0)$. Par définition de z_0, on a donc

$$w(z) \leq w(z_0) = u(z_0) - v(z_0) \leq 0$$

et ce, pour tout $z \in \mathbb{D}$. Autrement dit,

$$\frac{|G'(z)|}{2\sqrt{|G(z)|}(1 - |G(z)|)} \leq \frac{1}{1 - |z|^2} \qquad (z \in \mathbb{D})$$

ou encore

$$\frac{|rF'(rz)|}{2\sqrt{|F(rz)|}(1 - |F(rz)|)} \leq \frac{1}{1 - |z|^2} \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Avec $z = 0$ et $r \to 1$, on obtient

$$\frac{|F'(0)|}{2\sqrt{|F(0)|}(1 - |F(0)|)} \leq 1$$

et le résultat suit.

□

Démonstration du théorème (6.2.12).
Montrons que pour tout domaine $D \subseteq \mathbb{C}$ et $a_1, a_2, ..., a_5 \in \mathbb{C}_\infty$ distincts, la famille $\mathcal{F}(D, \{a_j\}_{j=1}^5)$ est normale.

Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe un domaine D et $a_1, a_2, ..., a_5 \in \mathbb{C}_\infty$ distincts tels que $\mathcal{F}(D, \{a_j\}_{j=1}^5)$ n'est pas normale. En appliquant le lemme de Zalcman, on obtient une fonction méromorphe non constante $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ à dérivée sphérique bornée avec $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C}, \{a_j\}_{j=1}^5)$. On peut supposer que $a_j \neq \infty$ pour chaque $j \in \{1, 2, ..., 5\}$. Considérons la fonction

$$g(z) := \frac{f'(z)^2}{\prod_{j=1}^5 (f(z) - a_j)}.$$

Comme $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C}, \{a_j\}_{j=1}^5)$, alors pour chaque $j \in \{1, 2, ..., 5\}$, ou bien f ne prend pas la valeur a_j ou bien chaque zéro de $f(z) - a_j$ est d'ordre plus grand ou égal à 2. Par conséquent, g est entière et, clairement, g n'est pas identiquement nulle. De plus, comme la dérivée sphérique de f est bornée, il suit que $g(z) \to 0$ lorsque $f(z) \to \infty$, donc g est non constante et il existe une suite $(z_n)_{n\geq 1}$ avec $g(z_n) \to \infty$, donc $f(z_n)$ ne tend pas vers ∞. Considérons les fonctions $h_n(z) := f(z + z_n)$. Alors la famille des dérivées sphériques $(h_n^\#)_{n\geq 1}$ est uniformément bornée, donc $(h_n)_{n\geq 1}$ est normale par le théorème de Marty (4.3.1). Quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que h_n converge localement χ-uniformément sur $\mathbb{C}$ vers une certaine fonction h. Comme $h_n(0) = f(z_n)$ et $f(z_n)$ ne tend pas vers ∞, on a que $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ est méromorphe. Or, $h(z) \equiv a_k$ pour un $k \in \{1, 2, \ldots, 5\}$, car sinon

$$g(z + z_n) \to \frac{h'(z)^2}{\prod_{j=1}^5 (h(z) - a_j)} \neq \infty$$

puisque la fonction $\frac{h'(z)^2}{\prod_{j=1}^5 (h(z)-a_j)}$ serait alors entière par le théorème d'Hurwitz, ce qui contredit $g(z_n) \to \infty$.

Pour n suffisamment grand, la fonction $F := h_n - a_k$ satisfait les hypothèses du lemme de Schwarz pour les racines carrés, donc

$$|f'(z_n)|^2 = |F'(0)|^2 \leq 4|F(0)| = 4|f(z_n) - a_k|$$

et ainsi

$$|g(z_n)| \leq \frac{4}{\prod_{j \neq k} |f(z_n) - a_j|}$$

ce qui est une contradiction car $f(z_n) \to h(0) = a_k$ et $g(z_n) \to \infty$.

$\square$

En particulier, on a montré le résultat suivant :

Corollaire 6.2.14. *Soit $a_1, \ldots, a_5 \in \mathbb{C}_\infty$ distincts et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ une fonction méromorphe non constante. Alors il existe un $j \in \{1, 2, \ldots, 5\}$ tel que f a un a_j-point simple.*

Remarquons ici que le nombre de a_j ne peut être réduit à 4, comme le montre la fonction elliptique de Weierstrass $\wp$, qui est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et satisfait

$$(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z) - a)(\wp(z) - b)(\wp(z) - c)$$

pour des nombres complexes distincts a, b, c. En effet, a, b, c et ∞ sont quatre valeurs totalement ramifiées distinctes de $\wp$, car si z_0 est tel que $\wp(z_0) = a, b$ ou c, alors l'équation ci-dessus nous assure que $\wp'(z_0) = 0$ et de plus, chaque pôle de $\wp$ est d'ordre 2 par construction.

On peut maintenant démontrer la version faible du théorème des cinq îles d'Ahlfors :

Démonstration des théorèmes (6.2.9) et (6.2.10).
Supposons que la conclusion du théorème (6.2.9) est fausse, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, la famille $\mathcal{F} := \{f : \langle f, D \rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{D}_1(\varepsilon), \mathbb{D}_2(\varepsilon), ..., \mathbb{D}_5(\varepsilon))\}$ n'est pas normale.

Pour chaque $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on applique le lemme de Zalcman à la famille $\mathcal{F}$ et on obtient une fonction méromorphe $f_\varepsilon : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ satisfaisant

$$f_\varepsilon^\#(z) \leq f_\varepsilon^\#(0) = 1 \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Il n'est pas difficile de vérifier que $\langle f_\varepsilon, \mathbb{C} \rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{D}_1(\varepsilon'), \mathbb{D}_2(\varepsilon'), ..., \mathbb{D}_5(\varepsilon'))$ si $\varepsilon' > \varepsilon$. Par le théorème de Marty (4.3.1), la famille $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ est normale. Ainsi, il existe une suite (ε_k) tendant vers 0 et une certaine fonction méromorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ telles que $f_{\varepsilon_k} \to f$ localement χ-uniformément sur $\mathbb{C}$. Comme $f_\varepsilon^\#(0) = 1$ pour chaque ε, il suit que f est non constante. Or, il est clair que f n'a pas de a_j-point simple, contredisant le corollaire (6.2.14). Ceci termine la démonstration du théorème (6.2.9)

Le théorème (6.2.10) découle ensuite du théorème (6.2.9) : il suffit de remarquer que si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ est méromorphe non constante, alors la famille $(f(nz))_{n\geq 1}$ n'est pas normale en 0. Il s'agit du même argument que celui utilisé dans la démonstration du principe de Zalcman (5.2.2).

$\square$

L'idée de la démonstration des théorèmes (6.2.9) et (6.2.10) est fort ingénieuse. Étant donné une fonction méromorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ non constante, le théorème (6.2.10) repose sur la question suivante : avec suffisamment de choix pour le domaine d'arrivée, est-il possible de rendre f conforme sur un certain sous-domaine ? La principale difficulté réside dans l'injectivité de la fonction f : il faut avoir suffisamment de contrôle sur les différents points qui empêchent f d'être injective. Il s'avère que ces points sont reliés aux zéros de la dérivée de f, d'où le lien avec les valeurs totalement ramifiées. Ainsi, avec suffisamment d'information sur les valeurs totalement ramifiées de f, on peut répondre de façon affirmative à la question sous-jacente au théorème d'Ahlfors. Le lien se fait *via* un passage à la limite grâce au lemme de Zalcman.

Pour illustrer la remarque précédente, considérons un cas limite pour le nombre de valeur totalement ramifiées : la fonction $\wp$ de Weierstrass. Cette fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ possède quatre valeurs totalement ramifiées, disons a, b, c et ∞. Ainsi, si D_a, D_b, D_c et D_∞ sont quatre domaines de Jordan de fermetures mutuellement disjointes contenant respectivement a, b, c et ∞, alors il est clair qu'aucun sous-domaine du plan ne peut être envoyé conformément par $\wp$ sur un de ces domaines, puisqu'alors on aurait une application conforme dont la dérivée s'annule en un point, ce qui est impossible. Ceci montre en particulier que le nombre de domaines de Jordan dans le théorème d'Ahlfors ne peut être réduit à 4.

6.2.4 Le Scheibensatz d'Ahlfors

Le théorème des cinq îles d'Ahlfors n'est en fait qu'un cas particulier d'un résultat plus général, appelé *Scheibensatz d'Ahlfors*. Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine et $f : D \to \mathbb{C}_\infty$ une fonction méromorphe. Soit $V \subseteq \mathbb{C}_\infty$ un domaine de Jordan. Une composante simplement connexe U de $f^{-1}(V)$ avec $\overline{U} \subseteq D$ est appelée **île** de f sur V. Il est alors facile de montrer que la restriction de f à U, $f|_U : U \to V$, est une application propre. Le degré de cette application propre est appelé **multiplicité** de l'île U et une île de multiplicité 1 est appelée **île simple**.

Théorème 6.2.15 (Scheibensatz d'Ahlfors)**.** *Soit $q \in \mathbb{N}$, $D_1, D_2, \ldots D_q \subseteq \mathbb{C}_\infty$ des domaines de Jordan de fermetures mutuellement disjointes et $m_1, \ldots, m_q \in \mathbb{N}$ satisfaisant*

$$\sum_{j=1}^{q}\left(1-\frac{1}{m_j}\right) > 2.$$

Alors la propriété que chaque île de f sur D_j a une multiplicité plus grande ou égale à m_j est une propriété de Picard–Montel.

Le cas particulier $q = 5$ et $m_j = 2$ pour chaque j est tout simplement le théorème des cinq îles. Si l'on remplace les domaines de Jordan par des disques, on obtient une version faible du théorème (6.2.15) et la démonstration de la sous-section précédente se généralise très bien grâce au résultat suivant, qui est une généralisation du théorème (6.2.12) :

Théorème 6.2.16 (Théorème de Nevanlinna)**.** *Soit $q \in \mathbb{N}$, soit $a_1, a_2, \ldots, a_q \in \mathbb{C}_\infty$ distincts et soit $m_1, \ldots, m_q \in \mathbb{N}$. Supposons que*

$$\sum_{j=1}^{q}\left(1-\frac{1}{m_j}\right) > 2.$$

Alors la propriété que pour chaque $j \in \{1, 2, \ldots, q\}$, chaque zéro de la fonction $f(z) - a_j$ (ou chaque pôle de f si $a_j = \infty$) est d'ordre plus grand ou égal à m_j est une propriété de Picard-Montel.

On peut aussi prendre $m_j = \infty$, ce qui signifie que f ne prend pas la valeur a_j. Le cas $q = 5$ et $m_j = 2$ pour chaque j correspond au théorème (6.2.12).

Il n'est pas difficile de voir que la propriété de Nevanlinna satisfait les trois conditions du principe de Zalcman, donc la normalité de la famille associée sur un domaine donné est équivalente au fait qu'il n'existe pas de fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ non constante ayant cette propriété. Par contre, la preuve que ces deux énoncés sont en fait vrais est plus difficile, il s'agit essentiellement de généraliser la démonstration de (6.2.12), voir [7].

Remarquons que le petit théorème de Picard et le théorème de Montel ne sont qu'un cas particulier du théorème de Nevanlinna : il suffit de prendre $q = 3$ et $m_j = \infty$ pour $j = 1, 2, 3$.

6.2.5 Le théorème des cinq îles d'Ahlfors et l'itération des fonctions complexes

Tel que mentionné précédemment, le théorème des cinq îles d'Ahlfors possède de nombreuses applications en dynamique complexe. La section suivante en présente quelques exemples.

Rappelons que Ent ∪ Rat désigne l'ensemble des fonctions entières transcendantes ou rationnelles de degré plus grand ou égal à 2. Le résultat ci-dessous est une conséquence direct du théorème des cinq îles d'Ahlfors :

Théorème 6.2.17. *Soit $D_1, D_2, \ldots, D_5 \subseteq \mathbb{C}_\infty$ des domaines de Jordan de fermetures mutuellement disjointes. Si $f \in \mathrm{Ent} \cup \mathrm{Rat}$ et si $D \subseteq \mathbb{C}_\infty$ est un domaine satisfaisant $D \cap J_f \neq \emptyset$, alors il existe un $j \in \{1, 2, \ldots, 5\}$, un $n \in \mathbb{N}$ et un domaine $U \subseteq D$ tels que $f^n : U \to D_j$ est conforme.*

Démonstration. Supposons le contraire. Alors les f^n satisfont la propriété $\mathcal{P}(D_1, ..., D_5)$ sur D, donc la famille $(f^n)_{n \geq 1}$ est normale sur ce domaine par le théorème des cinq îles, version forte. En particulier, la suite des itérés $(f^n)_{n \geq 1}$ est normale en chaque point de $D \cap J_f \neq \emptyset$, ce qui contredit la définition de l'ensemble de Julia.

□

On a également l'analogue suivant, associé à la version faible du théorème des cinq îles d'Ahlfors :

Théorème 6.2.18. *Soit $a_1, a_2, \ldots, a_5 \in \mathbb{C}$ distincts. Alors il existe un $\varepsilon > 0$ ayant la propriété suivante : si $f \in \mathrm{Ent} \cup \mathrm{Rat}$ et si $D \subseteq \mathbb{C}_\infty$ est un domaine satisfaisant $D \cap J_f \neq \emptyset$, alors il existe un $j \in \{1, 2, \ldots, 5\}$, un $n \in \mathbb{N}$ et un domaine $U \subseteq D$ tels que $f^n : U \to \mathbb{D}(a_j, \varepsilon)$ est conforme.*

Le théorème des cinq îles nous permet également de déduire les deux résultats suivants, dont les démonstrations apparaissent dans [6], p.27 :

Théorème 6.2.19. *Soit $f \in \mathrm{Ent} \cup \mathrm{Rat}$ et soit $D_1, \ldots, D_5 \subseteq \mathbb{C}_\infty$ des domaines de Jordan de fermetures mutuellement disjointes. Soit $V_1, \ldots, V_5$ des domaines satisfaisant $V_j \cap J_f \neq \emptyset$ et $V_j \subseteq D_j$ pour $j = 1, 2, \ldots, 5$. Alors il existe un $k \in \{1, \ldots, 5\}$, un $n \in \mathbb{N}$ et un domaine $U \subseteq V_k$ tels que $f^n : U \to D_k$ est conforme.*

Théorème 6.2.20. *Soit* $f \in \mathrm{Ent} \cup \mathrm{Rat}$ *et soit* $a_1, \ldots, a_5 \in \mathbb{C}$ *distincts et* ε *comme dans l'énoncé du théorème* (6.2.18)*. Soit* $0 < \delta < \varepsilon$ *et* $V_1, \ldots, V_5$ *des domaines du plan satisfaisant* $V_j \cap J_f \neq \emptyset$ *et* $V_j \subseteq \mathbb{D}(a_j, \delta)$ *pour* $j = 1, \ldots, 5$*. Alors il existe un* $k \in \{1, \ldots, 5\}$*, un* $n \in \mathbb{N}$ *et un domaine* $U \subseteq V_k$ *tels que* $f^n : U \to \mathbb{D}(a_k, \delta)$ *est conforme.*

Les résultats précédents permettent d'obtenir la caractérisation suivante de l'ensemble de Julia :

Théorème 6.2.21. *Soit* $f \in \mathrm{Ent} \cup \mathrm{Rat}$*. Alors* J_f *est la fermeture de l'ensemble des points périodiques répulsifs de* f*.*

La démonstration utilise le résultat très classique suivant :

Lemme 6.2.22. *Soit* f *une fonction holomorphe sur le disque* $\mathbb{D}(\alpha, r)$*, où* $\alpha \in \mathbb{C}$ *et* $r > 0$*. Supposons que* $f(\mathbb{D}(\alpha, r)) \subseteq K \subset \mathbb{D}(\alpha, r)$ *pour un certain compact* K*. Alors* f *possède un point fixe attractif.*

Démonstration. Supposons d'abord que $r = 1$ et $\alpha = 0$. Soit $0 < \rho < 1$ tel que $K \subset \mathbb{D}(0, \rho)$. Si $|z| = \rho$, alors

$$|f(z)| < \rho = |z|$$

et donc par le théorème de Rouché, la fonction $f(z) - z$ a le même nombre de zéros dans $\mathbb{D}$ que la fonction identité, c'est-à-dire un. Il suit que f a un point fixe, disons $z_0 \in \mathbb{D}$. Par le lemme de Schwarz-Pick,

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1 - |f(z_0)|^2}{1 - |z_0|^2} = 1$$

avec égalité seulement si f est un automorphisme de $\mathbb{D}$, ce qui n'est pas le cas puisque $f(\mathbb{D}) \subseteq K \subset \mathbb{D}$ donc $f(\mathbb{D}) \neq \mathbb{D}$. Ainsi, z_0 est attractif.

Pour le cas général, soit $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}(\alpha, r)$ définie par $\phi(z) := rz + \alpha$. Alors l'image du disque unité $\mathbb{D}$ par la fonction $\phi^{-1} \circ f \circ \phi$ est contenue dans le compact $\phi^{-1}(K) \subset \mathbb{D}$, et donc $\phi^{-1} \circ f \circ \phi$ possède un point fixe attractif z_0, par la première partie de la preuve. Il suit que $\phi(z_0)$ est un point fixe de f. De plus, comme z_0 est un point fixe attractif de $\phi^{-1} \circ f \circ \phi$, on a

$$1 > |(\phi^{-1} \circ f \circ \phi)'(z_0)| = \left| \left(\frac{f(rz + \alpha) - \alpha}{r} \right)' (z_0) \right| = |f'(rz_0 + \alpha)| = |f'(\phi(z_0))|$$

donc $\phi(z_0)$ est un point fixe attractif de f.

$\square$

Démonstration du théorème. Remarquons d'abord que chaque point périodique répulsif appartient à J_f, ce qui suit de la proposition (6.2.3). Comme J_f est fermé, il contient nécessairement la fermeture de l'ensemble des points périodiques répulsifs. Pour l'inclusion inverse, montrons que si $D \subseteq \mathbb{C}_\infty$ est un domaine qui intersecte J_f, alors D contient nécessairement un point périodique répulsif. Par (6.2.4), J_f est un ensemble parfait non vide, donc $D \cap J_f$ contient cinq points distincts, disons $a_1, a_2, \ldots, a_5 \in \mathbb{C}$. Soit $\varepsilon > 0$ comme dans l'énoncé du théorème (6.2.18). Soit $0 < \delta < \varepsilon$ tel que $\mathbb{D}(a_j, \delta) \subseteq D$ pour chaque $j \in \{1, \ldots, 5\}$. Par le théorème (6.2.20), il existe un $\mu \in \{1, \ldots, 5\}$, un $n \in \mathbb{N}$ et un domaine U avec $\overline{U} \subseteq \mathbb{D}(a_\mu, \delta)$ tels que $f^n : U \to \mathbb{D}(a_\mu, \delta)$ est conforme. Par le lemme précédent, la branche de la fonction inverse de f^n qui envoie $\mathbb{D}(a_\mu, \delta)$ sur U possède un point fixe attractif $z_0 \in \mathbb{D}(a_\mu, \delta) \subseteq D$. Il suit que z_0 est un point périodique répulsif de f.

□

Notons que la preuve du résultat précédent est beaucoup plus facile si l'on s'intéresse uniquement aux fonctions rationnelles. L'intérêt d'utiliser le théorème d'Ahlfors réside donc dans la preuve du théorème (6.2.21) pour les fonctions entières transcendantes. Cette approche est due à Baker [1], qui utilise toutefois la version générale du théorème des cinq îles. L'utilisation de la version faible est due à Bergweiler [6].

6.3 Séries lacunaires

Dans tous les exemples présentés jusqu'ici, les propriétés de fonctions méromorphes étudiées étaient suffisamment régulières, dans le sens qu'elles satisfaisaient les trois conditions du principe de Zalcman, ce qui simplifiait grandement l'étude des familles normales associées. C'est également le cas pour un vaste éventail de différentes propriétés. Or, il existe néanmoins des cas intéressants où le principe de Zalcman ne s'applique pas. La théorie des séries lacunaires est un bon exemple de cas problématique où l'une des trois conditions du principe de Zalcman (la deuxième en l'occurrence) n'est pas respectée. L'étude de la normalité des familles de séries lacunaires nécessite donc une nouvelle approche.

Soit $\mathcal{T}$ un ensemble fini ou infini d'entiers ordonnés de la forme $0 = m_0 < m_1 < \ldots$ et soit f une fonction holomorphe sur un domaine D contenant 0. On dit que f a la propriété $\mathcal{P}_\mathcal{T}$ sur D si le développement de Taylor de f autour de 0 est de la forme

$$f(z) = \sum_{k \in \mathcal{T}} a_k z^k$$

et si f ne s'annule pas sur D. Pour simplifier la notation, on note par $\mathcal{F}_{\mathcal{T},D}$ la famille des telles fonctions, i.e.

$$\mathcal{F}_{\mathcal{T},D} := \{f : \langle f, D\rangle \in \mathcal{P}_{\mathcal{T}}\}.$$

Conformément à l'idée du principe de Bloch, Ruscheweyh et Wirths [23] ont énoncé la conjecture suivante :

Conjecture. *La famille $\mathcal{F}_{\mathcal{T},\mathbb{D}}$ est normale sur le disque unité $\mathbb{D}$ si et seulement si $\langle f, \mathbb{C}\rangle \in \mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ implique que f est constante.*

Notons que l'implication directe est claire, puisque si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une fonction entière ayant la propriété $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$, alors les fonctions $f_n(z) := f(nz)$, pour $n \in \mathbb{N}$, ont également la même propriété. Or, cette famille n'est pas normale sur $\mathbb{D}$, à moins que f ne soit constante. Il s'agit du même argument que celui utilisé dans la preuve du principe de Zalcman.

Le cas le plus simple demeure celui où $\mathcal{T}$ est fini, donc la famille $\mathcal{F}_{\mathcal{T},\mathbb{D}}$ ne contient que des polynômes. Cette famille est normale sur $\mathbb{D}$, ce qui découle du lemme suivant :

Lemme 6.3.1. *Soit $P(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ un polynôme tel que $P(z) \neq 0$ sur $\mathbb{D}$. Alors*

$$|a_k| \leq \binom{n}{k}|a_0| \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Démonstration. Écrivons $P(z) = a_n(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)$, où les z_j satisfont $|z_j| \geq 1$ pour chaque j. Considérons le polynôme

$$Q(z) := z^n P(1/z) = a_n(-1)^n \left(\prod_{j=1}^{n} z_j\right)(z - 1/z_1)(z - 1/z_2)\ldots(z - 1/z_n).$$

En examinant le coefficient de z^j dans ce polynôme et en utilisant le fait que $|1/z_j| \leq 1$ pour chaque $1 \leq j \leq n$, on obtient

$$|a_j| \leq |a_n| \left|(-1)^n \prod_{j=1}^{n} z_j\right| \binom{n}{j} = |a_0|\binom{n}{j} \qquad (1 \leq j \leq n).$$

$\square$

Théorème 6.3.2. *Soit $\mathcal{T} = \{m_0, m_1, \ldots, m_n\}$, où les m_j sont des entiers satisfaisant $m_0 = 0 < m_1 < \cdots < m_n$. Alors la famille $\mathcal{F}_{\mathcal{T},\mathbb{D}}$ est normale sur le disque unité $\mathbb{D}$.*

Démonstration. Soit $(p_k)_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{T},\mathbb{D}}$. Alors chaque p_k est de la forme

$$p_k(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j^{(k)} z^{m_j}$$

et par le lemme précédent, pour $k \geq 1$ et $z \in \mathbb{D}$, on a

$$|p_k(z)| \leq \sum_{j=0}^{n} \binom{m_n}{m_j} |p_k(0)| \leq 2^{m_n} |p_k(0)|.$$

Si la suite $(p_k(0))_{k\geq 1}$ est bornée, alors le théorème de Montel (3.2.2) nous assure l'existence d'une sous-suite $(p_{k_l})_{l\geq 1}$ qui converge localement uniformément sur $\mathbb{D}$. Sinon, quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que $|p_k(0)| \to \infty$ lorsque $k \to \infty$. Définissons, pour $k \geq 1$,

$$q_k(z) := \frac{p_k(z)}{p_k(0)}.$$

Alors les q_k appartiennent également à la famille $\mathcal{F}_{\mathcal{T},\mathbb{D}}$ et forment une suite localement uniformément bornée sur $\mathbb{D}$. Par le théorème de Montel encore une fois, il existe une sous-suite $(q_{k_l})_{l\geq 1}$ qui converge localement uniformément sur $\mathbb{D}$, disons vers q, avec $q(0) = 1$. En utilisant le théorème de Hurwitz et le fait que les coefficients des q_{k_l} convergent vers ceux de q, on obtient que $q \in \mathcal{F}_{\mathcal{T},\mathbb{D}}$. Maintenant, soit $K \subseteq \mathbb{D}$ un compact et posons $\rho(K) := \min\{|q(z)| : z \in K\}$. Alors $\rho(K) > 0$ et pour tout l suffisamment grand, on a

$$|q_{k_l}(z)| \geq \frac{\rho(K)}{2} \qquad (z \in K)$$

et donc

$$|p_{k_l}(z)| \geq |p_{k_l}(0)| \frac{\rho(K)}{2} \qquad (z \in K),$$

ce qui montre que $p_{k_l} \to \infty$ localement uniformément sur $\mathbb{D}$.

Dans les deux cas, la famille $\mathcal{F}_{\mathcal{T},\mathbb{D}}$ est normale sur $\mathbb{D}$.

$\square$

Ainsi, la conjecture est vraie pour les $\mathcal{T}$ finis. Qu'en est-il des autres $\mathcal{T}$? Le problème demeure ouvert, bien qu'il ait été résolu pour certains types de séries lacunaires. C'est le cas notamment des séries lacunaires dites **de Fejér**, c'est-à-dire les séries de la forme

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{m_k} z^{m_k}$$

où $m_0 = 0 < m_1 < \dots$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_k} < \infty$.

Le point de départ de l'étude de ces séries est un résultat classique de L. Fejér qui affirme qu'une fonction entière dont le développement de Taylor autour de 0 est une série lacunaire de Fejér possède nécessairement un zéro. Ruscheweyh et Wirths [23] ont montré que la famille associée $\mathcal{F}_{\mathcal{T},\mathbb{D}}$ est normale, ce qui démontre la conjecture dans le cas des séries de Fejér :

Théorème 6.3.3 (Ruscheweyh–Wirths)**.** *Soit $\mathcal{T}$ un ensemble d'entiers satisfaisant*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_k} < \infty. \tag{6.8}$$

Alors la famille $\mathcal{F}_{\mathcal{T},\mathbb{D}}$ est normale.

La démonstration utilise le lemme suivant, dû à Fekete, dont la preuve apparaît dans [19] :

Lemme 6.3.4. *Soit $\mathcal{T}$ un ensemble d'entiers satisfaisant* (6.8) *et soit*

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_{m_k} z^{m_k}$$

une fonction holomorphe qui ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$. Alors pour chaque $j \in \mathbb{N}$, le polynôme

$$P_j(z) := \sum_{k=0}^{j} \sigma_{jk} a_{m_k} z^{m_k}$$

ne s'annule pas non plus sur $\mathbb{D}$, où

$$\sigma_{jk} := \prod_{\mu=j+1}^{\infty} \left(1 - \frac{m_k}{m_\mu}\right) \qquad (0 \leq k \leq j).$$

En appliquant le lemme (6.3.1) à chacun des P_j, on obtient

$$\sigma_{jk}|a_{m_k}| \leq \binom{m_j}{m_k} |\sigma_{j0}||a_{m_0}|$$

pour $k = 1, \ldots, j$. Avec $k = j$ et en utilisant le fait que $m_0 = 0$ et $\sigma_{j0} = 1$, on obtient

$$|a_{m_j}| \leq \frac{1}{\sigma_{jj}} |a_0| \qquad (j \in \mathbb{N}). \tag{6.9}$$

On a également besoin du lemme suivant :

Lemme 6.3.5. *Soit $m_1 < m_2 < \dots$ une suite d'entier positifs satisfaisant* (6.8). *Alors*

$$\lim_{j\to\infty} \sigma_{jj}^{-1/m_j} = \lim_{j\to\infty} \prod_{\mu=j+1}^{\infty} \left(1 - \frac{m_j}{m_\mu}\right)^{-1/m_j} = 1.$$

Démonstration. Pour chaque $j \in \mathbb{N}$, on définit k_j comme étant le plus petit entier positif satisfaisant

$$m_{j+k_j} > 2m_j.$$

On a

$$\sum_{k=j}^{j+k_j-1} \frac{1}{m_k} \geq \frac{k_j}{m_{j+k_j-1}} \geq \frac{k_j}{2m_j}$$

donc par (6.8)

$$k_j = o(m_j) \qquad (j \to \infty). \tag{6.10}$$

Pour montrer le résultat, il suffit de prouver que $c_j \to 1$ et $d_j \to 1$, où

$$c_j := \prod_{\mu=j+1}^{j+k_j} \left(1 - \frac{m_j}{m_\mu}\right)^{-1/m_j},$$

$$d_j := \prod_{\mu=j+k_j+1}^{\infty} \left(1 - \frac{m_j}{m_\mu}\right)^{-1/m_j}.$$

Comme les m_j sont strictements croissants, il est facile de vérifier que pour $\mu > j$,

$$\left(1 - \frac{m_j}{m_\mu}\right)^{-1} = \frac{m_\mu}{m_\mu - m_j} \leq \frac{m_j + \mu - j}{\mu - j},$$

et donc

$$1 \leq c_j \leq \prod_{\mu=j+1}^{j+k_j} \left(\frac{m_j + \mu - j}{\mu - j}\right)^{1/m_j} = \binom{m_j + k_j}{m_j}^{1/m_j}.$$

En utilisant (6.10) et la formule de Stirling, on remarque que le membre de droite tend vers 1 lorsque $j \to \infty$, donc $c_j \to 1$. Pour les d_j, on utilise l'inégalité

$$\frac{1}{1-x} \leq \exp\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

valide pour $0 \leq x \leq 1$ pour obtenir

$$1 \leq d_j \leq \exp\left(\sum_{\mu=j+k_j+1}^{\infty} \frac{1}{m_\mu} \frac{1}{1 - m_j/m_\mu}\right) \leq \exp\left(2\sum_{\mu=j}^{\infty} \frac{1}{m_\mu}\right),$$

où la dernière inégalité suit de la définition des k_j. Par (6.8), $d_j \to 1$ lorsque $j \to \infty$.

□

Démonstration du théorème (6.3.3).
Soit σ_{kk} comme dans l'énoncé du lemme (6.3.4). Définissons

$$F(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{kk}} z^{m_k}.$$

Le rayon de convergence de cette série est donné par

$$R := \left(\limsup_{k\to\infty} \left(\frac{1}{\sigma_{kk}} \right)^{1/m_k} \right)^{-1}$$

Le lemme (6.3.5) entraîne que R vaut 1, donc F est holomorphe sur $\mathbb{D}$. Soit $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{T},\mathbb{D}}$. Alors par (6.9),

$$|f(z)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{m_k} z^{m_k} \right| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{kk}} |a_0||z|^{m_k} = |f(0)|F(|z|). \tag{6.11}$$

Maintenant, soit $(f_n) \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{T},\mathbb{D}}$. On distingue deux cas :

Premier cas. Si la suite $(f_n(0))$ est bornée, alors par (6.11) la suite (f_n) est localement uniformément bornée. Le théorème de Montel (3.2.2) nous assure l'existence d'une sous-suite qui converge localement uniformément sur $\mathbb{D}$.

Deuxième cas. Sinon, quitte à considérer une sous-suite, supposons que les $|f_n(0)|$ tendent vers ∞. Posons $g_n := f_n/f_n(0)$. Alors les g_n appartiennent à la famille $\mathcal{F}_{\mathcal{T},\mathbb{D}}$. De plus, l'inégalité (6.11) entraîne que la suite (g_n) est localement uniformément bornée et donc par le théorème de Montel encore une fois, il existe une sous-suite (g_{n_k}) qui converge localement uniformément sur $\mathbb{D}$, disons vers g, avec $g(0) = 1$ et $g \in \mathcal{F}_{\mathcal{T},\mathbb{D}}$. Soit $K \subseteq \mathbb{D}$ un compact et posons $\rho(K) := \min\{|g(z)| : z \in K\}$. Alors $\rho(K) > 0$ et pour tout k suffisamment grand, on a

$$|g_{n_k}(z)| \ge \frac{\rho(K)}{2} \qquad (z \in K)$$

et donc

$$|f_{n_k}(z)| \ge |f_{n_k}(0)|\frac{\rho(K)}{2} \qquad (z \in K).$$

Ceci montre que $f_{n_k} \to \infty$ localement uniformément sur $\mathbb{D}$.

Dans les deux cas, la famille $\mathcal{F}_{\mathcal{T},\mathbb{D}}$ est normale.

$\square$

Le théorème de Ruscheweyh et Wirths (6.3.3) affirme que si $\mathcal{T} = \{m_0, m_1, \ldots\}$ est un ensemble d'entiers avec $0 = m_0 < m_1 < m_2 \ldots$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_k} < \infty$, alors la famille $\mathcal{F}_{\mathcal{T},\mathbb{D}}$ est normale. Ainsi, la conjecture est démontrée pour ce cas particulier. Selon Hayman [11], d'autres candidats intéressants pour la vérification de la conjecture sont les ensembles $\mathcal{T}$ ayant la propriété suivante : il existe un $d \in \mathbb{N}$ tel que l'ensemble

$$\{kd : k \in \mathbb{N}\} \cap \mathcal{T}$$

est fini.

Le cas $d = 1$ a déjà fait l'objet du théorème (6.3.2). Pour $d \geq 3$, le problème est encore ouvert mais le cas $d = 2$ fut étudié en détail par Ruscheweyh et Salinas [22]. Le résultat principal est le suivant, qui affirme que la conjecture est vraie pour un ensemble $\mathcal{T}$ qui satisfait la condition de Hayman avec $d = 2$:

Théorème 6.3.6 (Ruscheweyh–Salinas)**.** *Si $\mathcal{T}$ ne contient qu'un nombre fini d'entiers pairs, alors $\mathcal{F}_{\mathcal{T},\mathbb{D}}$ est normale.*

Ce résultat découle d'un théorème plus général, qui requiert d'abord quelques définitions préalables. Soit $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{\mathbb{N}\cup\{0\},\mathbb{D}}$ et pour $a, b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$\mathcal{G}(a, b, n) := \{f \in \mathcal{F} : f(0) = 1, \exists g \in \mathcal{F} \text{ avec } g(0) = 1 \text{ et } af + bg \in P_n\},$$

où P_n désigne l'ensemble des polynômes de degré plus petit ou égal à n.

Théorème 6.3.7. *Pour $a \neq 0$ et $a \neq -b$, les familles $\mathcal{G}(a, b, n)$ sont normales sur le disque unité $\mathbb{D}$.*

La démonstration du théorème (6.3.7) requiert le lemme suivant, dont la preuve apparaît dans [22] :

Lemme 6.3.8. *Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_n > 0$ telle que pour chaque polynôme $p \in P_n$, il existe une suite $(\rho_k)_{k\geq 1}$, avec $\rho_k \in (1 - 2^{-k}, 1 - 2^{-k-1})$, $k \in \mathbb{N}$, telle que*

$$|p(z)| \geq C_n |p(0)|(1 - |z|)^n \qquad (|z| = \rho_k,\ k \in \mathbb{N}).$$

Démonstration du théorème (6.3.7). Remarquons d'abord que le cas $b = 0$ est clair, puisque $\mathcal{G}(a, 0, n) \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{T}_n,\mathbb{D}}$, où $\mathcal{T}_n := \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, et la famille $\mathcal{F}_{\mathcal{T}_n,\mathbb{D}}$ est normale par le théorème (6.3.2). Supposons donc que ni a, ni b ne sont nuls. Soit $f \in \mathcal{G}(a, b, n)$. Alors $f(0) = 1$ et il existe une fonction $g \in \mathcal{F}$ avec $g(0) = 1$ et $af + bg = p$ pour un certain polynôme $p \in P_n$. On a donc $p(0) = a + b$ et si

$$h(z) := \frac{p(z)}{f(z)} = a + \frac{bg(z)}{f(z)},$$

alors h est holomorphe sur $\mathbb{D}$, $h \neq a$ sur $\mathbb{D}$, h a au plus n zéros dans $\mathbb{D}$ et $h(0) = a+b \neq 0$. Le critère fondamental de Montel généralisé (3.3.2) et le corollaire (3.2.4) nous assurent que la famille de toutes les telles fonctions est localement uniformément bornée sur $\mathbb{D}$. Ainsi, pour chaque $0 < r < 1$, il existe une constante $M(r) < \infty$ indépendante de h telle que $|h(z)| \leq M(r)$ pour $|z| \leq r$, et donc

$$|f(z)| \geq \frac{|p(z)|}{M(|z|)} \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Par le lemme, il existe une constante $C_n > 0$ indépendante de p et une suite $(\rho_k)_{k\geq 1}$, avec $\rho_k \in (1 - 2^{-k}, 1 - 2^{-k-1})$, telles que

$$|f(z)| \geq |a+b| \frac{C_n}{M(\rho_k)}(1-\rho_k)^n \qquad (|z| = \rho_k,\ k \in \mathbb{N}).$$

Mais $M(\rho_k) \leq M(1 - 2^{-k-1})$ et $(1-\rho_k)^n \geq 2^{n(-k-1)}$, donc

$$|f(z)| \geq |a+b| \frac{C_n}{M(1-2^{-k-1})2^{n(k+1)}} \qquad (|z| = \rho_k,\ k \in \mathbb{N}).$$

Maintenant, soit $0 < r < 1$ et considérons le disque fermé $\overline{\mathbb{D}(0,r)}$. Soit k_0 tel que $r < 1 - 2^{-k_0}$, donc $\overline{\mathbb{D}(0,r)} \subseteq \overline{\mathbb{D}(0,\rho_{k_0})}$. Or, si $|z| = \rho_{k_0}$,

$$|f(z)| \geq |a+b| \frac{C_n}{M(1-2^{-k_0-1})2^{n(k_0+1)}}$$

et par le principe du minimum (f ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$),

$$|f(z)| \geq |a+b| \frac{C_n}{M(1-2^{-k_0-1})2^{n(k_0+1)}} := M'(r) > 0 \qquad (z \in \overline{\mathbb{D}(0,r)})$$

où $M'(r)$ ne dépend pas de f. En appliquant le critère fondamental de Montel à la famille $\{1/f : f \in \mathcal{G}(a,b,n)\}$, on obtient que celle-ci est normale, donc $\mathcal{G}(a,b,n)$ aussi car $f(0) = 1$ pour chaque $f \in \mathcal{G}(a,b,n)$.

□

Corollaire 6.3.9 (Théorème de Ruscheweyh–Salinas)**.** *Si $\mathcal{T}$ ne contient qu'un nombre fini d'entiers pairs, alors $\mathcal{F}_{\mathcal{T},\mathbb{D}}$ est normale.*

Démonstration. Remarquons d'abord que si $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{T},\mathbb{D}}$, alors $\frac{f(z)}{f(0)} + \frac{f(-z)}{f(0)} \in P_m$, où m ne dépend que de $\mathcal{T}$. Il découle de ceci que $f(z)/f(0) \in \mathcal{G}(1,1,m)$.

Soit $(f_n) \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{T},\mathbb{D}}$. On veut montrer que (f_n) possède une sous-suite qui converge localement uniformément sur $\mathbb{D}$, soit vers une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ ou soit vers ∞. On distingue deux cas :

Premier cas.
Supposons que la suite $(f_n(0))_{n\geq 1}$ est bornée. Comme $(f_n/f_n(0))_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{G}(1,1,m)$ qui est normale par le théorème (6.3.7), il suit du corollaire (3.2.4) que la suite $(f_n/f_n(0))_{n\geq 1}$ est localement uniformément bornée. Ainsi, la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est également localement uniformément bornée et le théorème de Montel nous assure ensuite l'existence d'une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge localement uniformément sur $\mathbb{D}$.

Deuxième cas.
Sinon, quitte à considérer une sous-suite, supposons que les $|f_n(0)|$ tendent vers ∞. Posons $g_n := f_n/f_n(0)$. Alors les g_n appartiennent à la famille $\mathcal{G}(1,1,m)$, qui est normale. Il suit que la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ est localement uniformément bornée et donc par le théorème de Montel encore une fois, il existe une sous-suite $(g_{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge localement uniformément sur $\mathbb{D}$ vers une fonction holomorphe, disons g. Comme les g_{n_k} ne s'annulent pas sur $\mathbb{D}$ et $g_{n_k}(0) = 1$ pour tout k, il suit du théorème de Hurwitz que $g \neq 0$ sur $\mathbb{D}$. Soit $K \subseteq \mathbb{D}$ un compact et posons $\rho(K) := \min\{|g(z)| : z \in K\}$. Alors $\rho(K) > 0$ et pour tout k suffisamment grand, on a

$$|g_{n_k}(z)| \geq \frac{\rho(K)}{2} \qquad (z \in K)$$

et donc

$$|f_{n_k}(z)| \geq |f_{n_k}(0)|\frac{\rho(K)}{2} \qquad (z \in K).$$

Ceci montre que $f_{n_k} \to \infty$ localement uniformément sur $\mathbb{D}$.

Dans les deux cas, $\mathcal{F}_{\mathcal{T},\mathbb{D}}$ est normale.

$\square$

Chapitre 7

Conclusion

En somme, il apparaît indéniable, après lecture du présent mémoire, que la méthode de renormalisation de Zalcman demeure un outil extrêmement puissant dans la théorie des familles normales de fonctions méromorphes. Cette méthode repose essentiellement sur le principe de Zalcman (5.2.2), lequel fournit une condition suffisante pour qu'une propriété donnée soit une propriété de Bloch, c'est-à-dire une propriété pour laquelle le principe de Bloch est respecté. Ainsi, pour une propriété $\mathcal{P}$ satisfaisant les trois conditions du principe de Zalcman, les deux énoncés suivants sont équivalents :

(a) Si $\langle f, \mathbb{C} \rangle \in \mathcal{P}$, alors f est constante.

(b) Pour tout domaine $D \subseteq \mathbb{C}$, la famille $\{f : \langle f, D \rangle \in \mathcal{P}\}$ est normale sur D.

On a également mentionné dans la section 5.2 qu'en fait **(b)** découle non seulement de **(a)**, mais aussi de la condition plus faible suivante :

(c) Si $\langle f, \mathbb{C} \rangle \in \mathcal{P}$ et si la dérivée sphérique de f est bornée, alors f est constante.

En particulier, pour une propriété $\mathcal{P}$ satisfaisant les trois conditions du principe de Zalcman, **(a)**, **(b)** et **(c)** sont équivalents. Cette remarque se révèle fort utile lorsque vient le temps de démontrer des résultats concernant des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$, comme on l'a vu dans la section 6.1, dans laquelle on a utilisé le principe de Zalcman pour obtenir une preuve élémentaire des théorèmes de Picard et de Montel.

Dans la section 6.2, la méthode de Zalcman nous a permis de démontrer une version faible du théorème des cinq îles de Ahlfors, qui affirme que si $a_1, a_2, \ldots, a_5 \in \mathbb{C}$ sont distincts, alors il existe un $\varepsilon > 0$ tel que si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ est une fonction méromorphe non constante, alors il existe un $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tel que f envoie un certain domaine D conformément sur le disque centré en a_j de rayon ε. Ce résultat a ensuite été utilisé pour démontrer que l'ensemble de Julia d'une fonction entière transcendante est égal à la fermeture de l'ensemble de ses points périodiques répulsifs, résultat assez élémentaire dans le cas des fonctions rationnelles mais beaucoup plus difficile à démontrer pour les fonctions entières transcendantes.

Dans la plupart des exemples considérés dans la littérature, les propriétés qui interviennent sont suffisament régulières, dans le sens qu'elles satisfont les trois conditions du principe de Zalcman. Ceci facilite grandement l'étude de la normalité des familles associées. Or, un questionnement subsiste : qu'en est-il des autres propriétés ? Sont-elles intéressantes ? La section 6.3 a été consacrée à un cas particulier où le principe de Zalcman ne s'applique pas mais qui demeure néanmoins très intéressant : il s'agit des séries lacunaires. On y a présenté une conjecture encore ouverte concernant une famille particulière de séries lacunaires. On a fait la démonstration de la conjecture pour le cas particulier des séries de Féjer ainsi que pour celui des séries lacunaires satisfaisant la condition de Hayman avec $d = 2$, c'est-à-dire les séries de la forme

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{m_k} z^{m_k}$$

où seulement un nombre fini de m_j sont pairs. Or, les preuves sont très techniques et l'approche utilisée ne semble pas pouvoir être généralisée aux séries lacunaires quelconques. Bref, l'exemple des séries lacunaires illustre à merveille l'intérêt de développer d'autres méthodes permettant d'étudier la normalité d'une famille de fonctions méromorphes, dans le cas où la méthode de Zalcman ne s'applique pas. Ceci semble être une piste de recherche très intéressante à poursuivre.

Bibliographie

[1] I. N. Baker : Repulsive fixpoints of entire functions. *Math. Z.*, 104:252–256, 1968.

[2] I. N. Baker : Limit functions and sets of non-normality in iteration theory. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I No.*, 467:11, 1970.

[3] A. F. Beardon : *Iteration of rational functions*, volume 132 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.

[4] W. Bergweiler : Iteration of meromorphic functions. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 29(2):151–188, 1993.

[5] W. Bergweiler : A new proof of the Ahlfors five islands theorem. *J. Anal. Math.*, 76:337–347, 1998.

[6] W. Bergweiler : The role of the Ahlfors five islands theorem in complex dynamics. *Conform. Geom. Dyn.*, 4:22–34 (electronic), 2000.

[7] W. Bergweiler : Bloch's principle. *Comput. Methods Funct. Theory*, 6(1):77–108, 2006.

[8] J. Clunie et W. K. Hayman : The spherical derivative of integral and meromorphic functions. *Comment. Math. Helv.*, 40:117–148, 1966.

[9] A. Eremenko : Normal holomorphic curves from parabolic regions to projective spaces. *arXiv*, 0710.1281v1.

[10] P. Fatou : Sur l'itération des fonctions transcendantes Entières. *Acta Math.*, 47(4):337–370, 1926.

[11] W. K. Hayman : Value distribution and A.P. gaps. *J. London Math. Soc. (2)*, 28(2):327–338, 1983.

[12] O. Lehto et K. I. Virtanen : On the behaviour of meromorphic functions in the neighbourhood of an isolated singularity. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I.*, 1957(240):9, 1957.

[13] D. Minda : A heuristic principle for a nonessential isolated singularity. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 93(3):443–447, 1985.

[14] D. Minda : Another approach to Picard's theorem and a unifying principle in geometric function theory. *In Current topics in analytic function theory*, pages 186–200. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.

[15] M. Misiurewicz : On iterates of e^z. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 1(1):103–106, 1981.

[16] P. Montel : Sur les suites infinies des fonctions. *Ann. École Norm. Sup.*, 24:233–334, 1907.

[17] S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi et T. Ueda : *Holomorphic dynamics*, volume 66 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Translated from the 1995 Japanese original and revised by the authors.

[18] X. C. Pang : Bloch's principle and normal criterion. *Sci. China Ser. A*, 32(7):782–791, 1989.

[19] C. Pommerenke : Lacunary power series and univalent functions. *Michigan Math. J.*, 11:219–223, 1964.

[20] P. Rosenbloom : L'itération des fonctions entières. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 227:382–383, 1948.

[21] L. A. Rubel : Four counterexamples to Bloch's principle. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 98(2):257–260, 1986.

[22] S. Ruscheweyh et L. Salinas : On some cases of Bloch's principle. *Sci. Ser. A Math. Sci. (N.S.)*, 1:97–100, 1988.

[23] S. Ruscheweyh et K.-J. Wirths : Normal families of gap power series. *Results Math.*, 10(1-2):147–151, 1986.

[24] J. L. Schiff : *Normal families.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 1993.

[25] L. Zalcman : A heuristic principle in complex function theory. *Amer. Math. Monthly*, 82(8):813–817, 1975.

[26] L. Zalcman : Normal families : new perspectives. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 35(3):215–230, 1998.