



UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE

UFR des Sciences et des Techniques
Institut de mathématiques de Bourgogne

THÈSE

Pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université de Bourgogne
Discipline : mathématiques

par
Gautier Picot

le 29 novembre 2010

Contrôle optimal géométrique et numérique
appliqué au problème de transfert Terre-Lune

Directeur de thèse
Bernard Bonnard

Rapporteurs :

Bergounioux Maïtine
Chyba Monique
Pomet Jean-Baptiste

Université d'Orléans
Université de Hawaii
INRIA

Rapportrice
Rapportrice
Rapporteur

Membres du jury :

Bergounioux Maïtine
Bonnard Bernard
Caillau Jean-Baptiste
Gergaud Joseph
Jauslin Hans Rudolf
Pomet Jean-Baptiste

Université d'Orléans
Université de Bourgogne
Université de Bourgogne
ENSEEIH-INT-INT
Université de Bourgogne
INRIA

Examinatrice
Examinateur
Examinateur
Examinateur
Président
Examinateur

Table des matières

Introduction	1
1 Le problème restreint des 3 corps	5
1.1 Le problème des N corps	5
1.2 Le problème restreint des 3 corps plan	7
1.2.1 Equations du mouvement	7
1.2.2 Formalisme hamiltonien et régions de Hill	7
1.2.3 Points d'équilibre	9
1.2.4 Linéarisation au voisinage des points d'équilibre	11
1.2.5 Dynamique autour des points L_1 et L_2	13
1.2.6 Construction d'orbites à itinéraires prédéfinis	17
1.2.7 le problème restreint des 3-corps plan contrôlé	18
1.3 Le problème restreint des 3 corps spatial	19
1.3.1 Equations du mouvement et points d'équilibre	20
1.3.2 Dynamique au voisinage des points colinéaires	21
1.3.3 Le problème spatial contrôlé au voisinage de L_1	26
2 Outils géométriques et numériques en contrôle optimal.	27
2.1 Définition du problème	27
2.2 Le principe du maximum	28
2.3 Temps conjugués géométriques et conditions d'optimalité du second ordre	31
2.4 Problème de temps minimal	33
2.4.1 Le cas normal	33
2.4.2 Le cas anormal	34
2.5 Problème de minimisation de l'énergie	36
2.6 Méthode de tir simple	37
2.7 Méthode de continuation	37
2.8 Implémentation Numérique	39
3 Contribution scientifique	41
3.1 Transferts Terre-Lune à temps minimal et énergie minimale	41
3.2 Transferts à énergie minimale au voisinage du point L_1	44
Geometric and numerical techniques in optimal control of two and three-body problems	47
Note complémentaire : trajectoires Terre-Lune à énergie minimale et technique de recollement	87

Shooting and numerical continuation methods for computing time-minimal and energy-minimal trajectories in Earth-Moon transfer using low propulsion.	93
Energy-minimal transfers in the vicinity of the Lagrangian point L_1	121
Conclusion	133
Bibliographie	135

Remerciements

Je tiens à remercier profondément Bernard Bonnard de la confiance qu'il m'a accordée en me proposant d'effectuer cette thèse sous sa direction et de la rigueur avec laquelle il l'a encadrée. Sa présence, son exigence, sa grande culture mathématique et l'importance qu'il attache aux relations humaines ont été de formidables moteurs pour la poursuite de mes recherches. Je mesure maintenant à quel point je lui suis redevable et combien son enseignement sera bénéfique à mes activités futures. Je remercie au même titre Jean-Baptiste Caillau d'avoir porté autant d'intérêt à mon travail. Sa disponibilité, sa bienveillance et ses nombreux conseils ont été essentiels à ma bonne progression. Qu'il sache à quel point je lui suis reconnaissant. Je remercie sincèrement Maïtine Bergounioux, professeur à l'Université d'Orléans, d'avoir non seulement accepté de rapporter cette thèse, mais aussi encouragé, de concert avec ses collègues Emmanuel Trélat et Sandrine Grellier, mes premiers pas de chercheur au sortir de mon diplôme de Master. Je remercie également Monique Chyba, professeur à l'Université d'Hawaii et Jean-Baptiste Pomet, Chargé de recherches à l'INRIA de Sophia Antipolis, pour leur lecture critique de mon manuscrit, leurs précieuses remarques et leurs encouragements. Joseph Gergaud, maître de conférences à l'ENSEEIH de Toulouse, a oeuvré avec Nicolas Delong pour que je puisse présenter en juin 2010 mes résultats lors du séminaire du CNES sur les points de Lagrange. Je l'en remercie et suis heureux de le compter parmi mes examinateurs. Et je suis bien sûr très honoré qu'un homme de science tel que Hans Rudolf Jauslin, professeur à l'Université de Bourgogne, ait accepté de présider mon jury.

J'adresse une pensée particulière à Gabriel Janin et Bilel Daoud avec lesquels j'ai partagé ces trois dernières années la condition de doctorant en contrôle optimal et qui ont si souvent consacré du temps à me venir en aide, pour quelque question que ce soit. Je leur témoigne toute ma gratitude et leur souhaite la meilleure continuation possible sur les chemins qu'ils emprunteront. Je remercie chaleureusement au passage tous mes collègues et amis de l'association des Doctorants en Mathématiques de Dijon sans lesquels Calamity Janet, repue de goulash, ivre de noni et victorieuse du quatre à la suite, n'eût jamais dansé le rock'n'roll sur la piste enflammée du dancing club de Ganat. Parmi eux, je voudrais saluer ceux qui, ayant traversé les frontières de leur pays natal pour venir étudier dans le mien, m'ont instruit de leur regard sur le monde, depuis les bureaux 213 et 217 de l'aile A du bâtiment Mirande. Leur culture est désormais aussi mon patrimoine. Merci de même à tous les membres de l'Institut de Mathématiques de Bourgogne qui ont su, d'une quelconque manière, faciliter ou enrichir ma tâche de thésard depuis mon arrivée à Dijon. À Lucy Moser Jauslin, qui m'accorda toute l'attention qu'elle put en tant que directrice du laboratoire,

Rosane Ushirobira, qui me confia mes premières responsabilités d'enseignement, Anissa, Caroline, Gladys, Muriel, Véronique et Béatrice qui comblèrent si amicalement et avec efficacité toutes mes lacunes organisationnelles et administratives, Sylvie, qui résolut avec humour mes problèmes informatiques et Aziz dont le sourire quotidien contraste si agréablement avec la grisaille des mornes matins bourguignons.

Je rends évidemment hommage à mes parents, Catherine et Michel, qui, en encourageant chacun de mes choix personnels, m'ont appris à être libre. C'est avec patience et conviction qu'ils m'ont inculqué que le savoir et l'esprit critique sont les plus grandes des richesses. J'espère aujourd'hui les rendre fiers de moi. Je remercie avec tendresse mes soeurs Marie et Hélène pour les exemples qu'elles sont depuis toujours à mes yeux et n'oublie aucun des membres de ma famille qui m'entourent indéfectiblement avec toute l'affection que je peux souhaiter.

Je profite enfin de ces quelques lignes de liberté pour remercier mes amis d'hier et d'aujourd'hui, anciens, médiocres, gazelles et autres, d'avoir coloré les souvenirs de toutes ces années d'école qui se terminent aujourd'hui. Leurs éclats de rires me sont précieux.

*A Olivia
et à Mochère
dont l'absence est une joie et une souffrance.*

Il est quasiment impossible de différencier le nordique primitif
inférieur authentique du nordique primitif inférieur inventé.

L'épopée du buveur d'eau, J. Irving

Introduction

La conception de missions à faibles coûts énergétiques représente un enjeu majeur pour l'avenir de l'exploration spatiale. De la diminution des besoins en carburant dépendent les possibilités futures de missions spatiales à très longue durée, telles que d'hypothétiques voyages vers Mars ou les lunes de Jupiter. En effet, les approches classiques, qui au milieu du XXe siècle permirent les premiers pas de la conquête spatiale, sont beaucoup trop nécessiteuses en énergie pour être exploitées lors de missions à longue distance. Par exemple, les transferts de Hohmann dans le problème des 2 corps, utilisés avec efficacité au sein du programme Apollo, requièrent une quantité de fuel bien trop importante pour que l'on puisse envisager leur utilisation sur de longs intervalles de temps. Les nouvelles technologies ont d'ores et déjà apporté certaines solutions. La sonde SMART-1 de l'Agence Spatiale Européenne [57, 58], équipée de moteurs hélio-électriques, a ainsi effectué entre les mois de septembre 2003 et septembre 2006 un transfert à faible propulsion entre deux orbites Kepleriennes autour de la Terre et de la Lune suivi d'une mission d'observation. Cette mission a en particulier inspiré divers travaux dédiés à la minimisation de la consommation énergétique au cours des transferts Terre-Lune [6, 9].

Au cours des vingt dernières années, l'application de la théorie des systèmes dynamiques hamiltoniens au problème restreint des 3 corps a mis en lumière des classes d'orbites naturelles permettant de concevoir des missions spatiales très économiques en énergie. Ces travaux sont dus à la collaboration des équipes américaines et espagnoles respectivement composées de W. S. Koon, M. W. Lo, J. E. Marsden, S. D. Ross [41] et G. Gómez, A. Jorba, J. Llibre, J. Masdemont, C. Simó [26, 27, 30, 31]. Leur principe fondamental repose sur le recours à la structure de variétés invariantes autour de certains points d'équilibre du problème restreint des trois corps afin qu'un engin spatial puisse relier à moindre coût les zones d'influence gravitationnelle de deux planètes. Ces variétés invariantes contiennent les orbites évoluant asymptotiquement, en temps croissant ou décroissant, vers des orbites périodiques autour des points d'équilibre. Elles agissent par conséquent comme des chemins dynamiques dont les connections permettent de joindre naturellement différentes régions de l'espace. La mission GENESIS, notamment, fournit une brillante illustration de l'utilisation des variétés invariantes pour le problème de réduction du coût énergétique.

C'est l'objet de cette thèse que de proposer une approche complémentaire de calcul numérique de trajectoires spatiales à poussée faible dans le problème restreint des 3 corps. On se base pour ce faire sur l'application de résultats fondamentaux de la théorie du contrôle optimal géométrique. Plus précisément,

nous nous concentrons sur la minimisation de la consommation d'énergie et du temps final, dans un contexte de poussée faible, de différents transferts dans le système Terre-Lune. Le mouvement du satellite y est alors modélisé par les équations du problème restreint des 3 corps contrôlé. Un modèle complet doit tenir compte de la variation de la masse du satellite due à la consommation de carburant, le problème physique consistant alors à maximiser la masse finale. Nous ne tenons pas compte de cette considération dans nos travaux. Les trajectoires optimales sont recherchées parmi les projections des courbes extrémales solutions du principe du maximum de Pontryagin et peuvent être calculées grâce à des méthodes numériques indirectes. Ce procédé fait intervenir l'algorithme de Newton dont la convergence nécessite une phase d'initialisation fine. La complexité de ce problème est de surcroît accentuée par la "grande" dimension des espaces dans lesquels nous travaillons. Nous avons consacré une part importante de notre travail à surmonter cette difficulté au moyen de méthodes homotopiques ou d'une étude géométrique du système de contrôle linéarisé. L'optimalité locale des trajectoires extrémales est alors vérifiée à l'aide d'une condition du second ordre liée au concept de point conjugué. Dans le cas du problème de minimisation de l'énergie, une technique de "recollement" de trajectoires optimales approchées du problème des deux corps centrés sur la Terre et La Lune et d'une solution optimale de l'équation du mouvement linéarisée au voisinage du point d'équilibre L_1 du problème des 3 corps restreint est implémentée. On fournit ainsi une comparaison entre les trajectoires à énergie minimale calculées numériquement grâce à la méthode de tir et leurs approximations déterminées analytiquement au moyen du procédé de moyennation appliqué au problème de Kepler et de la résolution d'un problème de contrôle optimal linéaire.

L'utilisation des méthodes géométriques et numériques de contrôle optimal pour traiter des problèmes de mécanique spatiale n'est bien entendu pas neuve [14, 45, 63]. Dans un passé récent, de riches travaux théoriques et numériques ont abordé les problèmes de transfert orbital à temps minimal et énergie minimale dans le problème des 2 corps [8, 15, 18, 23, 24, 33, 47]. Cependant, l'application de ces outils sophistiqués au problème particulier des 3 corps constitue en elle-même une innovation et s'inscrit comme une thématique de recherche à part entière de notre équipe [19, 20].

Le présent document est organisé comme suit. Le chapitre 1 présente le problème des 3 corps restreint qui peut être formulé dans une version plane ou spatiale. On s'intéresse en particulier à la structure de variétés invariantes au voisinage des points d'équilibre colinéaires du problème. Nous en expliquons l'utilisation pour la conception de trajectoires spatiales peu coûteuses en énergie. Le chapitre 2 introduit les méthodes de contrôle optimal sur lesquelles s'appuient nos travaux. Le principe du maximum et les conditions du second ordre constituent les fondements géométriques sur lesquels reposent les méthodes numériques de tir et de continuation mises en oeuvre pour calculer les trajectoires optimales. Le chapitre 3 propose un résumé des études entreprises et des résultats obtenus au cours de cette thèse. Nous mettons l'accent sur les différents principes d'initialisation utilisés pour garantir l'efficacité des méthodes de tir employées durant nos recherches. Nous introduisons également un principe de recollement de trajectoires à énergie minimale dans les zones d'attraction terrestre et lunaire et au voisinage du point d'équilibre L_1 du système. Nos contri-

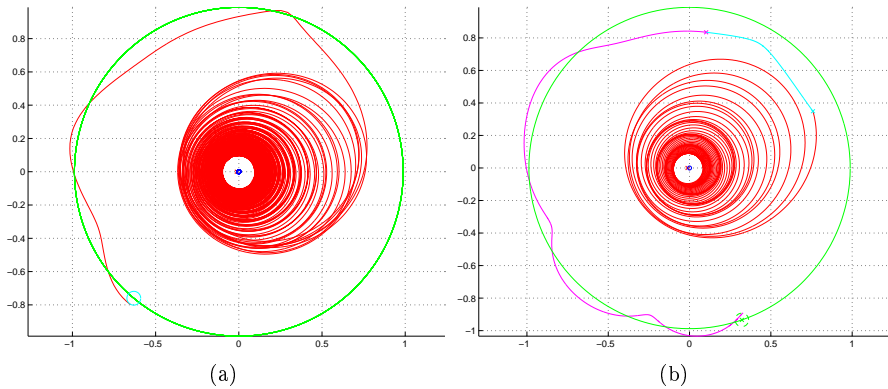


FIGURE 1 – Comparaison, dans le repère fixe, entre une trajectoire Terre-Lune à énergie minimale du problème restreint des trois corps plan calculée numériquement, représentée en (a), et un recollement de trajectoires à énergie minimale du problème à deux corps, en (b).

butions scientifiques sont présentées en détails au sein des trois articles cosignés ou entièrement rédigés et soumis ces trois dernières années. Nous fournissons une collection de transferts Terre-Lune à énergie minimale dans *Geometric and numerical techniques in optimal orbital transfer using low propulsion* [10] en complément de travaux géométriques de Bernard Bonnard et Jean-Baptiste Caillau sur le problème de minimisation du coût énergétique et de la technique de moyennation dans le problème des 2 corps. La note complémentaire *Trajectoires Terre-Lune à énergie minimale et technique de recollement*, rédigée en français et non soumise à publication, explique comment la technique de moyennation peut être utilisée pour approximer les trajectoires énergies minimales obtenus grâce à la méthode de tir. Nous complétons ces résultats par une étude considérable des trajectoires à temps minimal dans le système Terre-Lune dans *Shooting and numerical continuation methods for computing time-minimal or energy-minimal trajectories in Earth-Moon transfer using low propulsion* [51]. On s'intéresse enfin à l'influence de la structure de variétés invariantes sur la minimisation du coût énergétique des transferts au voisinage du point d'équilibre L_1 dans *Energy-minimal transfers in the vicinity of the Lagrangian point L_1* [52].

Cette thèse a été cofinancée, sous forme d'une Bourse Docteur Ingénieur, par le Centre National de la Recherche Scientifique (contrat no. 37244) et la Région Bourgogne (contrat no. 079201PP02454515). Elle a été effectuée au sein de l'équipe Equations différentielles et contrôle de l'Institut de Mathématiques de Bourgogne, de l'Université de Bourgogne.

Chapitre 1

Le problème restreint des 3 corps

1.1 Le problème des N corps

Présentons brièvement le problème dit des N corps où N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 [54]. Il s'agit d'étudier le mouvement de N particules de masses m_1, \dots, m_N évoluant dans le référentiel Galiléen \mathbb{R}^3 et soumises à la seule influence de leur attraction gravitationnelle mutuelle. Notons $q_i \in \mathbb{R}^3$ le vecteur position de la i ème particule. Le vecteur $q = (q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ est appelé vecteur d'état et selon la loi fondamentale de la dynamique, les équations du mouvement s'écrivent

$$M\ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q} \quad (1.1)$$

où U est le potentiel mécanique défini par

$$U = - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{Gm_i m_j}{|q_j - q_i|}$$

et M est la matrice diagonale

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_N \end{pmatrix}.$$

Définissons le Lagrangien $L = T - U$ où $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{q}_i^2$ représente l'énergie cinétique du système. L'équation du mouvement 1.1 peut alors s'écrire sous forme d'une équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (1.2)$$

dont les solutions minimisent localement, en vertu du principe de moindre action, la quantité

$$\mathcal{S}(q(\cdot)) = \int L(q, \dot{q}) dt.$$

En posant $p_i = m_i \dot{q}_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, \dots, N$, les systèmes 1.1 et 1.2 deviennent équivalents au système hamiltonien

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (1.3)$$

où la fonction hamiltonienne H est donnée par

$$H = T + U = \sum_{i=1}^N \frac{\|p_i\|^2}{2m_i} + U$$

et le vecteur $p = (p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ est appelé vecteur moment. Le problème des N corps est ainsi formalisé par un système de $6N$ équations du premier ordre dont on peut montrer qu'il admet 10 intégrales premières non triviales, voir par exemple [14]. Une simplification de ce problème consiste à supposer que les N points massiques appartiennent au plan \mathbb{R}^2 . Le référentiel Galiléen utilisé peut alors être remplacé par un repère en rotation. En effet, en posant

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \exp(\omega t K) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix},$$

on introduit l'ensemble des coordonnées en rotation uniforme définies grâce à la transformation

$$u_i = \exp(\omega t K) q_i, \quad v_i = \exp(\omega t K) p_i.$$

Un calcul classique [49] fournit alors l'expression du Hamiltonien du problème des N corps dans les coordonnées en rotation

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\|v_i\|^2}{2m_i} - \sum_{i=1}^N \omega u_i^T K v_i - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{G m_i m_j}{\|q_i - q_j\|}.$$

En 1687, Issac Newton énonçait dans ses célèbres *Principes mathématiques de philosophie naturelle* [50] l'intégrabilité du problème des 2 corps, dont on peut montrer que les trajectoires satisfont les équations de coniques particulières. La première loi de Kepler, stipulant que les planètes décrivent des ellipses dont le soleil est un foyer, était ainsi justifiée. Il fallut attendre la fin du XIXe siècle et les travaux de Poincaré [53] pour savoir que le problème des N corps n'est pas intégrable pour $N \geq 3$. Les solutions du problème des 3 corps sont par conséquent relativement méconnues, bien que certaines trajectoires remarquables fussent mises en lumière par Euler et Lagrange dès le XVIIe siècle. Dans la suite de ce chapitre, on présente le célèbre problème restreint des 3 corps, simplification du problème des 3 corps dans lequel la masse de la troisième particule est supposée négligeable en comparaison des deux autres. Ce modèle est notamment pertinent pour décrire le mouvement d'un satellite soumis aux forces gravitationnelles de deux planètes. Il peut être formulé de deux manières différentes :

- dans le problème restreint des 3 corps plan, on suppose que la particule de masse négligeable évolue dans le plan défini par la rotation des deux particules principales autour de leur centre de masse,
- dans le problème restreint des trois corps spatial, on tient compte de la direction verticale de sorte que la particule de masse négligeable évolue dans \mathbb{R}^3 .

1.2 Le problème restreint des 3 corps plan

On introduit dans cette section le problème restreint des 3 corps plan. Ce modèle mathématique a été largement étudié et les ouvrages de Szebehely [60] et Marchal [44] en offrent tous eux une description exhaustive. Il présente l'intérêt de fournir un cadre adéquat à l'étude d'approximations de transfert orbitaux entre deux planètes, ce qui explique son recours dans de très nombreux travaux de mécanique spatiale. L'objet des pages qui suivent est de résumer les propriétés et caractéristiques du problème restreint des trois corps plan dont il s'avère que l'utilisation permet la conception de missions spatiales à faible coût énergétique.

1.2.1 Equations du mouvement

Soient deux corps de masses M_1 et M_2 , appelés *primaires*, dont on suppose qu'ils décrivent un mouvement circulaire uniforme autour de leur centre de masse G . Un troisième corps de masse M_3 , négligeable au regard de M_1 et M_2 , est supposé évoluer dans le plan défini par la rotation des deux primaires et ce sans influencer leur mouvement. Pour se ramener à un problème sans dimension, on considère les normalisations suivantes : la somme des masses $M_1 + M_2$ est fixée à 1, de même que la distance entre les deux primaires et l'unité de temps considérée est telle que la constante gravitationnelle vaut également 1. Par conséquent, la vitesse angulaire des primaires est constante égale à 1 et leur période de révolution autour de G est égale à 2π . Supposons $M_1 \geq M_2$ et notons $M_2 = \mu$ et $M_1 = 1 - \mu$. Par commodité, on introduit un système de coordonnées dynamiques (x, y) en rotation uniforme autour de G et de même vitesse angulaire que les primaires, dont les positions dans le plan sont ainsi fixées à $(-\mu, 0)$ et $(1 - \mu, 0)$. On a ainsi défini le *repère synodique*. Le mouvement du troisième corps est alors décrit par les équations

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} \end{aligned} \tag{1.4}$$

où $-\Omega$ est le potentiel du système défini par

$$\Omega = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2}$$

et ρ_1 et ρ_2 sont les distances aux primaires

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2} \\ \rho_2 &= \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

1.2.2 Formalisme hamiltonien et régions de Hill

Le problème restreint des 3 corps plan admet une formulation hamiltonienne. En effet, en définissant les nouvelles variables

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad p_1 = \dot{x} - y, \quad q_2 = \dot{y} + x \tag{1.5}$$

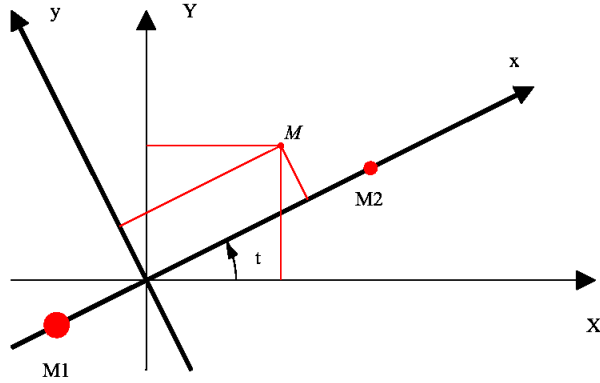


FIGURE 1.1 – Le système de coordonnées dynamiques (x, y) effectue une rotation de vitesse angulaire égale à 1 dans le sens trigonométrique relativement au système de coordonnées inertielles (X, Y) .

les équations 1.4 peuvent être réécrites

$$\dot{q} = \frac{\partial H_p}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H_p}{\partial q} \quad (1.6)$$

où le Hamiltonien H_p , donné par

$$H_p(q, p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + p_1 q_2 - p_2 q_1 - \frac{1 - \mu}{\rho_1} - \frac{\mu}{\rho_2}, \quad (1.7)$$

est une intégrale première du mouvement appelée *énergie intégrale*. Il s'en suit, en substituant les coordonnées (x, \dot{x}, y, \dot{y}) à (q, p) dans l'expression de H_p , que la quantité

$$E(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - \Omega(x, y)$$

est constante le long des trajectoires du système 1.4 (il convient de mentionner que la littérature fait souvent référence à la constante de Jacobi $C = -2E$ plutôt qu'à l'énergie intégrale elle-même). On est ainsi amené à considérer, pour des valeurs de e et μ fixées, les surfaces d'énergie de l'espace des phases

$$M(\mu, e) = \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \mid E(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = e\}$$

dans lesquelles sont contraintes d'évoluer les trajectoires solutions. On appelle *région de Hill* la projection de la surface d'énergie $M(\mu, e)$ sur l'espace des positions

$$H(\mu, e) = \{(x, y) \mid \Omega(x, y) + e \geq 0\}.$$

La topologie de la région de Hill possède cinq portraits différents. En effet, pour une valeur de μ fixée, il existe quatre niveaux d'énergie critiques notés e_1, e_2, e_3 et e_4 tels que $e_1 < e_2 < e_3 < e_4$ qui permettent de distinguer cinq régions de mouvement possibles :

- si $e < e_1$, le mouvement s'effectue soit dans un voisinage de la plus grosse des primaires appelé *domaine intérieur*, soit dans un voisinage de la plus petite des primaires, appelé *domaine extérieur*,
- si $e_1 < e < e_2$, une encolure entre le domaine intérieur et le domaine lunaire se forme,
- si $e_2 < e < e_3$, une seconde encolure entre le domaine lunaire et le *domaine extérieur* se crée ,
- si $e_3 < e < e_4$, le passage direct du domaine intérieur vers le domaine extérieur est possible,
- si $e_4 < e$ le mouvement n'a aucune restriction.

Les valeurs e_1, \dots, e_4 correspondent en fait à l'énergie intégrale calculée aux points d'équilibre du problème qui font l'objet de la section suivante.

1.2.3 Points d'équilibre

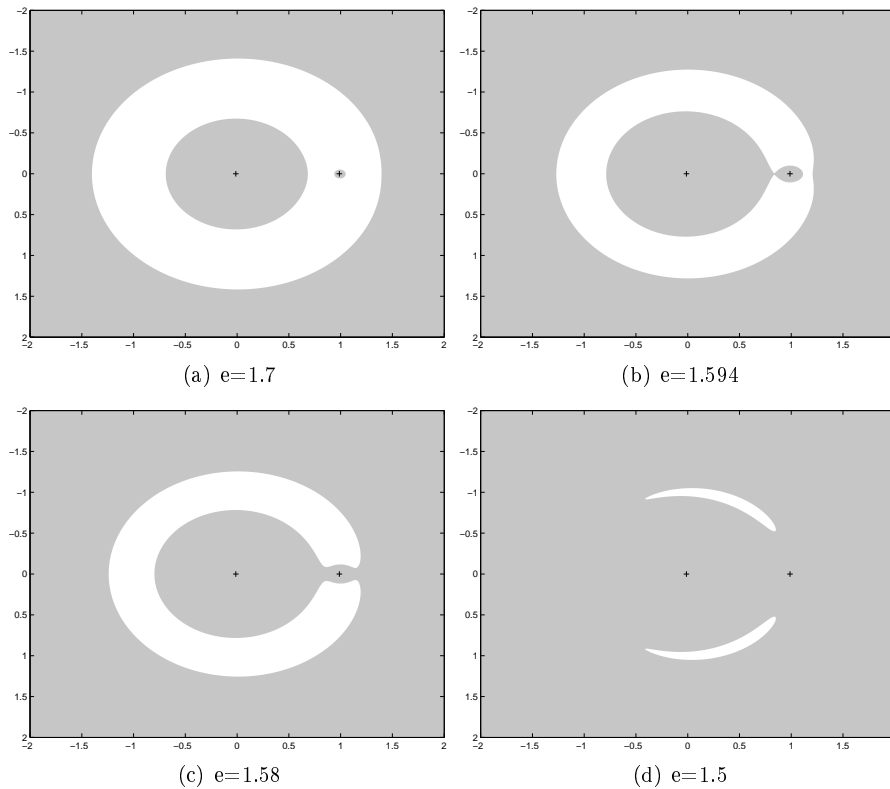


FIGURE 1.2 – Les différents portraits de la région de Hill en fonction de e . La valeur du paramètre μ est fixé à $1.2153e-2$ pour correspondre au cas du système Terre-Lune. Les deux croix rouges représentent la position des primaires. La région du mouvement autorisé est dessinée en gris.

Les points d'équilibre du problème restreint des 3 corps plan sont bien connus. Leur positions respectives dans le repère en rotation restent fixes et

ils représentent donc les localisations où les influences des deux primaires se compensent. Ils vérifient par définition les égalités

$$\dot{x} = \dot{y} = \ddot{x} = \ddot{y} = 0,$$

et, au regard de l'équation 1.4, sont donc les solutions du système

$$\begin{aligned} -x + (1 - \mu) \frac{x + \mu}{\rho_1^3} + \mu \frac{x - 1 + \mu}{\rho_2^3} &= 0 \\ -y + (1 - \mu) \frac{y}{\rho_1^3} + \mu \frac{y}{\rho_2^3} &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

On distingue tout d'abord trois *points colinéaires*, également appelés *points d'Euler*, notés L_1 , L_2 et L_3 et situés sur l'axe $y = 0$. Leur position respective est calculée en divisant l'axe des x en trois parties, voir [60]. Illustrons cette méthode en recherchant les points d'équilibre colinéaires dont l'abscisse appartient au segment $S_1 =]\mu - 1, \mu[$. Puisque leur ordonnée est nulle, le problème consiste à déterminer les solutions de l'équation

$$-x + \frac{1 - \mu}{(x + \mu)^2} + \frac{\mu}{(x - 1 + \mu)^2} = 0 \quad (1.9)$$

appartenant à S_1 . Notons γ_1 la distance d'une solution x_1 de cette équation à la plus petite des primaires. De l'égalité $x_1 = 1 - \mu - \gamma_1$, il vient, en substituant dans 1.9, que γ_1 est solution de

$$1 - \gamma_1 - \mu - \frac{1 - \mu}{(1 - \gamma_1)^2} - \frac{\mu}{\gamma_1^2} = 0 \quad (1.10)$$

que l'on réécrit sous la forme de l'équation du cinquième ordre

$$\gamma_1^5 - (3 - \mu)\gamma_1^4 + (3 - 2\mu)\gamma_1^3 + \mu\gamma_1^2 - 2\mu\gamma_1 + \mu = 0. \quad (1.11)$$

D'après la règle de Descartes, cette équation admet une unique solution positive si $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$ et une unique solution réelle pour $\mu = 0$. On peut montrer [60] que la solution γ_1 est donnée par le développement en série

$$\gamma_1 = r_1 \left(1 - \frac{1}{3}r_1 - \frac{1}{9}r_1^2 - \dots \right) \quad (1.12)$$

où $r_1 = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$. On peut ainsi calculer numériquement une valeur approchée de γ_1 en utilisant une méthode de Newton initialisée avec r_1 et en déduire la valeur de l'unique point d'Euler L_1 dont l'abscisse appartient au segment S_1 . En remplaçant S_1 par $S_2 =]\mu, +\infty[$ ou $S_3 =]-\infty, \mu - 1[$ et en adaptant la méthode précédente, on localise les deux autres points d'Euler L_2 et L_3 . Précisons que dans le système Terre-Lune, pour lequel $\mu = 1.2153e-2$, les abscisses respectives des points d'Euler L_1 , L_2 et L_3 sont données par

$$x_1 \simeq 0.8369, \quad x_2 \simeq 1.1557, \quad x_3 \simeq -1.0051.$$

On identifie également deux *points équilatéraux* ou *points de Lagrange* dont l'ordonnée n'est pas nulle. Pour ce faire, il suffit d'exprimer les coordonnées du vecteur

$$v = \begin{pmatrix} -x + (1 - \mu) \frac{x + \mu}{\rho_1^3} + \mu \frac{x - 1 + \mu}{\rho_2^3} \\ -y + (1 - \mu) \frac{y}{\rho_1^3} + \mu \frac{y}{\rho_2^3} \end{pmatrix}$$

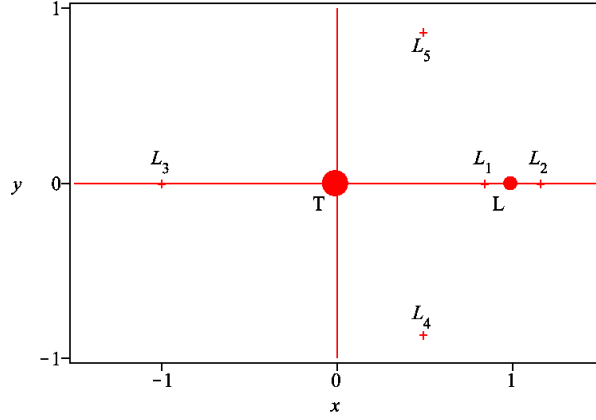


FIGURE 1.3 – Représentation des points d'équilibre du système Terre-Lune dans les coordonnées en rotation du problème restreint des 3 corps plan. Les primaires T et L symbolisent respectivement la Terre et la Lune.

dans la base $\{v_1, v_2\} = \{(x, y), (-y, x)\}$ et de déterminer les positions en lesquelles elles s'annulent. Il s'agit donc de résoudre le système

$$\begin{aligned} \langle v, v_1 \rangle &= 0, \\ \langle v, v_2 \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

équivalent à

$$\begin{aligned} (1 - \mu) \frac{(x + \mu)y - xy}{\rho_1^3} + \mu \frac{(x - 1 + \mu)y - xy}{\rho_2^3} &= 0, \\ -x^2 - y^2 + (1 - \mu) \frac{(x + \mu)x - y^2}{\rho_1^3} + \mu \frac{(x - 1 + \mu)x - y^2}{\rho_2^3} &= 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

dont il n'est pas difficile de montrer que les solutions vérifient

$$\rho_1 = \rho_2 = 1. \quad (1.15)$$

On détermine ainsi deux points d'équilibre L_4 et L_5 qui forment chacun le troisième sommet d'un triangle équilatéral avec les primaires et admettent donc respectivement pour coordonnées $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

L'étude de la dynamique au voisinage des points d'Euler est cruciale. Comme nous l'expliquerons dans la section 1.2.5, elle permet de mettre en évidence la structure de *variétés invariantes* utilisée pour la conception des missions spatiales à faible poussée. Ceci nécessite de linéariser les équations du mouvement autour des points d'équilibre.

1.2.4 Linéarisation au voisinage des points d'équilibre

Fixons $i \in \{1, \dots, 5\}$ et notons (x_i, y_i) les coordonnées du point de Lagrange L_i . Les coordonnées d'un point au voisinage de L_i peuvent s'écrire $(x_i + x, y_i + y)$

et, d'après 1.4, vérifient

$$\begin{aligned}\ddot{x}_i + \ddot{x} - 2(\dot{y} + \dot{y}_i) &= \frac{\partial \Omega}{\partial x}(x_i + x, y_i + y) \\ \ddot{y}_i + \ddot{y} + 2(\dot{x} + \dot{x}_i) &= \frac{\partial \Omega}{\partial y}(x_i + x, y_i + y).\end{aligned}\tag{1.16}$$

Un développement limité de Ω à l'ordre 2 fournit

$$\begin{aligned}\Omega(x_i + x, y_i + y) &= \Omega(x_i, y_i) + \frac{\partial \Omega}{\partial x}(x_i, y_i)x + \frac{\partial \Omega}{\partial y}(x_i, y_i)y \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}(x_i, y_i)x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}(x_i, y_i)y^2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y}(x_i, y_i)xy \\ &+ o(x^2)\end{aligned}$$

dont on déduit, en dérivant puis ôtant les termes d'ordre supérieur à 2, les équations linéarisées du mouvement autour de L_i

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}(x_i, y_i)x + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y}(x_i, y_i)y \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}(x_i, y_i)y + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y}(x_i, y_i)x.\end{aligned}\tag{1.17}$$

En posant $X = (x, y, \dot{x}, \dot{y})$, l'équation précédente s'écrit sous forme matricielle

$$\dot{X} = A_i X\tag{1.18}$$

où la matrice A_i est donnée par

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}(x_i, y_i) & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y}(x_i, y_i) & 0 & 2 \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y}(x_i, y_i) & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}(x_i, y_i) & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que le calcul précédent consiste simplement à réécrire les équations du mouvement dans le nouveau système de coordonnées en rotation recentré en L_i . L'examen des valeurs propres de A_i permet donc de statuer sur la stabilité au sens de Lyapunov du point L_i dont nous rappelons la définition.

Définition 1.2.1. Soient f un champ de vecteurs lisse de \mathbb{R}^n et x^* un état d'équilibre de l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$. On note $x(t, x_0)$ l'unique trajectoire vérifiant $x(0, x_0) = x_0$. On dit que x^* est *stable au sens de Lyapunov* si

$$\forall \epsilon > 0 \exists \eta > 0, |x_0 - x^*| \leq \eta \Rightarrow |x(t, x_0) - x^*| \leq \epsilon, \forall t \geq 0.$$

Si x^* est stable, on définit son *bassin d'attraction*

$$D(x^*) = \{x_0 \mid x(t, x_0) \rightarrow x^* \text{ quand } t \rightarrow +\infty\}.$$

On dit alors que x^* est *asymptotiquement stable* lorsque $D(x^*)$ est un voisinage de x^* . Lorsque $D(x^*) = \mathbb{R}^n$, on dit que x^* est *globalement asymptotiquement stable*.

Le théorème suivant est classique, voir par exemple [4, 14] pour une démonstration complète.

Théorème 1.2.1. *Soit $\dot{x} = Ax$ un système linéaire sur \mathbb{R}^n . Notons $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ le spectre de A où les valeurs propres sont comptées avec leur multiplicité.*

1. *L'origine est globalement asymptotiquement stable si et seulement si on a $\Re(\lambda_i) < 0$ pour $i = 1, \dots, n$.*
2. *L'origine est stable si et seulement si*
 - (a) *$\Re(\lambda_i) \leq 0$ pour $i = 1, \dots, n$.*
 - (b) *Pour chaque valeur propre λ_i telle que $\Re(\lambda_i) = 0$, les blocs de Jordan associés sur \mathbb{C} sont d'ordre n .*

Le calcul montre que pour $i = 1, \dots, 3$, la matrice A_i possède deux valeurs propres réelles dont l'une est positive et deux valeurs propres imaginaires pures. Les points d'équilibre colinéaires sont donc instables. Pour $i = 4, 5$, on peut montrer que les conditions de stabilité du théorème 1.2.1 ne sont remplies que dans le cas

$$\mu < 1/2(1 - \sqrt{69}/9) \simeq 3.851e - 2.$$

On en conclut que les points L_4 et L_5 sont en particulier stables dans le système Terre-Lune.

Dans la section suivante, on se concentre sur l'étude du flot autour des points colinéaires L_1 et L_2 . Comme nous l'avons représenté sur la figure 1.2, pour un niveau d'énergie supérieur à e_2 , leur voisinage agit respectivement comme une passerelle entre les zones d'influence de chaque primaire et un passage vers la zone extérieure. L'analyse qualitative de la dynamique à leur proximité est en conséquence d'un intérêt tout particulier pour le problème de transfert orbital.

1.2.5 Dynamique autour des points L_1 et L_2

Les résultats fondamentaux concernant la dynamique du problème des trois corps restreint au voisinage des points $L_{1,2}$ sont dus à C. Conley [21]. A la fin des années 1960, il publia la description du flot autour des points de libration que nous présentons dans cette section. Cet article fondateur a, notamment, inspiré de nombreux travaux de recherche des équipes américaines et barcelonaises respectivement constituées autour de J.E Marsden [37, 38, 39, 40, 41, 46] et Carles Simó [25, 28, 29, 35, 36, 59]. Ils conçurent en particulier des missions spatiales utilisant la dynamique libre autour des points d'Euler pour réduire significativement leur coût énergétique.

Comme nous l'avons déjà mentionné dans la section précédente, la matrice A_i du système linéarisé évaluée au point de Lagrange L_i , $i = 1, 2$, possède une paire de valeurs propres réelles et une paire de valeurs propres imaginaires pures. Plus précisément, ces valeurs propres sont de la forme $\pm\lambda$ et $\pm i\nu$ où λ et ν sont des constantes positives, voir [28] pour le calcul détaillé. Les vecteurs propres

associés sont donnés par

$$\begin{aligned}
u_\lambda &= (1, -\sigma, \lambda, -\lambda\sigma), \\
u_{-\lambda} &= (1, \sigma, -\lambda, -\lambda\sigma), \\
u_{i\nu} &= (1, -i\tau, i\nu, \nu\tau), \\
u_{-i\nu} &= (1, i\tau, -i\nu, \nu\tau),
\end{aligned} \tag{1.19}$$

avec $\sigma > 0$ et $\tau < 0$. Ils fournissent un cadre particulièrement pratique pour étudier le flot au voisinage de L_1 et L_2 . Posons

$$w_1 = u_{i\nu} - iu_{-i\nu}, \quad w_2 = -u_{-i\nu} + iu_{i\nu}.$$

En utilisant les coordonnées $(\xi, \eta, \varsigma_1, \varsigma_2)$ associées à la base $\{u_\lambda, u_{-\lambda}, w_1, w_2\}$, le système 1.18 s'écrit

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} &= \lambda\xi, \\
\dot{\eta} &= -\lambda\eta, \\
\dot{\varsigma}_1 &= \nu\varsigma_2, \\
\dot{\varsigma}_2 &= -\nu\varsigma_1
\end{aligned} \tag{1.20}$$

dont les solutions explicites sont

$$\begin{aligned}
\xi(t) &= \xi^0 \exp^{\lambda t}, \\
\eta(t) &= \eta^0 \exp^{-\lambda t}, \\
\varsigma_1(t) &= \varsigma_1^0 \cos \nu t + \varsigma_2^0 \sin \nu t \\
\varsigma_2(t) &= \varsigma_2^0 \cos \nu t - \varsigma_1^0 \sin \nu t.
\end{aligned} \tag{1.21}$$

où $\xi^0, \eta^0, \varsigma_1^0$ et ς_2^0 représentent les conditions initiales. L'expression de l'énergie intégrale devient

$$E = \lambda\xi\eta + \frac{\nu}{2}(\varsigma_1^2 + \varsigma_2^2). \tag{1.22}$$

Il est aisé de vérifier que les deux fonctions $\xi\eta$ et $|\varsigma|^2 = \varsigma_1^2 + \varsigma_2^2$ sont constantes le long des solutions et constituent par conséquent deux nouvelles intégrales premières du mouvement. On introduit ainsi la notion de *Région d'équilibre*, notée \mathcal{R} [21, 41], que l'on détermine en imposant les deux conditions

$$E = \epsilon, \quad \text{et} \quad |\eta - \xi| \leq c \tag{1.23}$$

où ϵ et c sont des constantes positives. La région d'équilibre est de cette manière homéomorphe au produit d'une 2-sphère et d'un intervalle. Effectivement, pour chaque valeur de $|\eta - \xi|$ appartenant à $[-c, c]$, l'égalité $E = \epsilon$, que l'on réécrit

$$\frac{\lambda}{4}((\eta + \xi)^2 - (\eta - \xi)^2) + \frac{\nu}{2}(\varsigma_1^2 + \varsigma_2^2) = \epsilon,$$

est vérifiée sur la sphère d'équation

$$\frac{\lambda}{4}(\eta + \xi)^2 = \epsilon + \frac{\lambda}{4}(\eta - \xi)^2 - \frac{\nu}{2}(\varsigma_1^2 + \varsigma_2^2). \tag{1.24}$$

On définit alors la *sphère frontière* n_1 (resp. n_2) comme celle associée à la valeur $\eta - \xi = -c$ (resp. $\eta - \xi = c$). De plus, pour chaque 2-sphère déterminée par

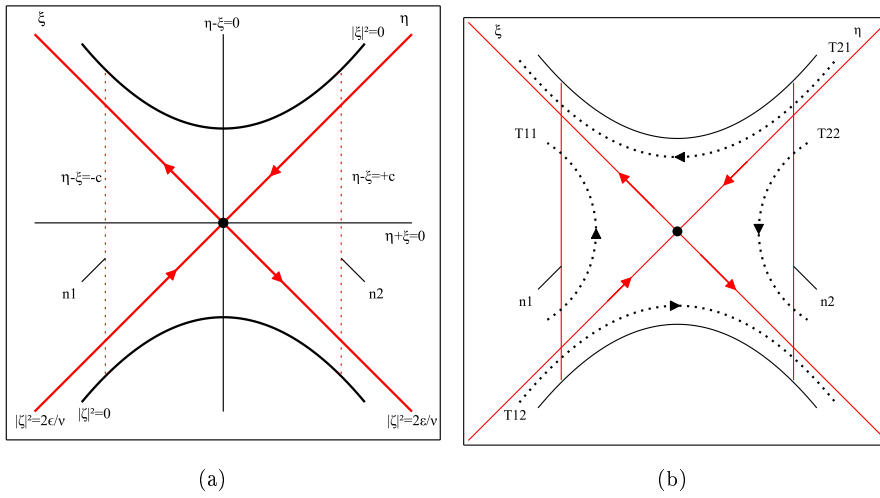


FIGURE 1.4 – Projection sur le plan (η, ξ) de la région d'équilibre \mathcal{R} et des différentes classes d'orbites au voisinage des points L_1 et L_2 (les axes sont tournés de 45°). (a) La région d'équilibre \mathcal{R} est comprise entre les segments en pointillés représentant les sphères frontières n_1 et n_2 et les segments d'hyperboles correspondant à $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 = 0$. Le point central représente l'orbite périodique de \mathcal{R} et les axes η et ξ portent respectivement les orbites asymptotiques à temps croissant et décroissant. Pour alléger les notations, on note $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2 \in \mathbb{C}$ le complexifié du couple (ζ_1, ζ_2) . (b) L'orbite en pointillés $T_{i,j}$ représente une orbite issue de la sphère n_1 et à destination de n_2 . Les orbites $T_{1,1}$ et $T_{2,2}$ sont donc des orbites de non-transit et $T_{1,2}$ et $T_{2,1}$ sont des orbites de transit.

l'équation 1.24, *l'équateur* désigne la région où $\eta + \xi = 0$ et les *hémisphère nord* et *sud* sont respectivement décrits par les inégalités $\eta + \xi > 0$ et $\eta + \xi < 0$.

Le flot dans la région d'équilibre est alors schématisé en projetant les trajectoires solutions du système 1.20 sur le plan (η, ξ) , ce qui fournit le portrait classique d'un point critique, voir figure 1.4. La projection de \mathcal{R} est comprise entre les hyperboles d'équation $\eta\xi = \frac{\epsilon}{\lambda}$, correspondant à l'intégrale $\varsigma_1^2 + \varsigma_2^2 = 0$, et les droites $\eta - \xi = \pm c$ qui ne sont autre que les projections des sphères frontières n_1 et n_2 . Les orbites de la région d'équilibre se projettent sur les branches d'hyperboles d'équation $\eta\xi = \text{constante} \in [-c, c]$, sauf évidemment lorsque $\eta\xi = 0$. Si $\eta\xi > 0$, les extrémités des projections des orbites joignent les deux droites frontières, ce qui n'est pas vrai lorsque $\eta\xi < 0$. Pour représenter globalement la dynamique au sein de la région d'équilibre, il faut enfin associer à chaque point de la projection sur le plan (η, ξ) le cercle correspondant à l'équation

$$\varsigma_1^2 + \varsigma_2^2 = \frac{2}{\nu}(\epsilon - \lambda\eta\xi) \quad (1.25)$$

que doit vérifier le couple de coordonnées $(\varsigma_1, \varsigma_2)$ en vertu de 1.24. Il existe par conséquent à l'intérieur de la région d'équilibre \mathcal{R} neuf classes d'orbites qui sont regroupées en quatre catégories :

1. le point $\eta = \xi = 0$ est la projection d'une orbite périodique autour de $L_{1,2}$ appelée *orbite de Lyapunov instable*.
2. les deux demi-droites définies par $\xi = 0, \eta \neq 0$ (resp. $\eta = 0, \xi \neq 0$) correspondent à deux cylindres d'orbites asymptotiques qui convergent vers l'orbite de Lyapunov en $+\infty$ (resp. $-\infty$).
3. Chaque branche d'hyperbole donnée par $\eta\xi > 0$ est la projection d'un cylindre d'orbites parcourant la région d'équilibre d'une sphère frontière à l'autre. Ces orbites restent dans le même hémisphère ; plus précisément, elles appartiennent à l'hémisphère nord si elles se dirigent de n_2 vers n_1 et à l'hémisphère sud dans l'autre cas. En raison de la traversée de la région \mathcal{R} qu'elles effectuent, elles sont appelées *orbites de transit*.
4. Enfin, les branches d'hyperboles correspondant à $\eta\xi < 0$ représentent des cylindres d'orbites se déplaçant d'un hémisphère à l'autre mais dont les extrémités appartiennent à la même sphère frontière. Si $\eta > 0$, les orbites sont issues de la sphère n_1 et la rejoignent, passant de l'hémisphère sud à l'hémisphère nord. Dans le cas opposé où $\eta < 0$, les orbites partent de n_2 et y reviennent, évoluant de l'hémisphère nord à l'hémisphère sud. Ces orbites retournant à leur sphère d'origine sont appelées *orbites de non-transit*.

La figure 1.4 illustre bien le fait que les orbites asymptotiques séparent les deux types de mouvements que sont les orbites de transit, qui passent d'une région à l'autre, et les orbites de non-transit qui restent confinées dans un certain domaine. Ces orbites asymptotiques sont les approximations linéaires des *variétés invariantes* de l'orbite de Lyapunov correspondant au niveau d'énergie ϵ . Elles sont définies comme l'ensemble des conditions initiales de l'espace des phases desquelles les trajectoires issues convergent en temps infini vers l'orbite de Lyapunov. On parle de *variété stable* lorsque les trajectoires convergent en temps croissant et de *variété instable* lorsqu'elles convergent en temps décroissant.

Ce rôle de séparatrice est essentiel pour le design de mission spatiale à faible propulsion. Par exemple, si l'on considère un niveau d'énergie très légèrement supérieur à e_1 , la capture par la Lune d'un satellite en orbite autour de la Terre n'est possible qu'en utilisant le *tube invariant* constitué par les orbites de transit évoluant du domaine intérieur vers le domaine lunaire et bordé par les branches des variétés stables et instables correspondantes. Dans la section suivante, nous proposons un bref aperçu de techniques basées sur la structure de variétés invariantes mises en oeuvre pour calculer numériquement des trajectoires spatiales peu coûteuses en énergie.

1.2.6 Construction d'orbites à itinéraires prédéfinis

À l'analyse qualitative du flot au voisinage des points $L_{1,2}$ ont succédé de riches études de trajectoires particulières du problème restreint des trois corps plan. En 1969, R. McGehee mettait en évidence au sein de sa thèse de doctorat [48] certaines *orbites homoclines*. Ces orbites appartiennent à l'intersection des variétés stables et instables d'une orbite périodique autour d'un point d'équilibre et relient par conséquent asymptotiquement cette orbite périodique à elle-même. Au début des années 2000, l'équipe de J. Marsden conceptualisait des *trajectoires hétéroclines* naturelles reliant les deux orbites de Lyapunov autour de L_1 et L_2 associées à la même constante de Jacobi. En concaténant ces trajectoires hétéroclines aux trajectoires homoclines déjà connues, ils déduisirent des trajectoires du problème des trois corps restreint suivant un itinéraire prédéfini à travers les différentes régions possibles du mouvement. Ce résultat majeur peut être énoncé sous la forme simplifiée suivante, voir par exemple [29, 38, 40].

Théorème 1.2.2. *Soit une suite $u = (u_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ dont les termes appartiennent à l'ensemble de symboles $\{I, M, X\}$ où I désigne le domaine intérieur, M le domaine lunaire et X le domaine extérieur. Considérons $t = 0$ comme le temps présent. Alors il existe une orbite dont les localisations passées et futures relativement aux trois régions correspondent à u .*

Ils proposèrent en outre une procédure systématique permettant de calculer numériquement une orbite associée à un itinéraire donné. Cette procédure est décrite précisément dans [3, 29, 40]. Leur méthode est basée sur la détermination de points appartenant aux intersections de *coupes de Poincaré* de variétés invariantes autour de L_1 ou L_2 . Ces coupes de Poincaré sont déterminées en calculant l'intersection d'une variété invariante avec une section de Poincaré S , voir [34], convenablement choisie dans le domaine du mouvement. En sélectionnant comme conditions initiales les points de l'intersection Λ des coupes de Poincaré des variétés stables et instables avec S puis en intégrant ces conditions à temps croissant et décroissant, on construit les portions d'orbites évoluant naturellement d'une certaine région admissible du mouvement vers une autre. Pour générer une orbite respectant un itinéraire plus long, il faut "concaténer" différentes portions d'orbites calculées comme précédemment. Subdivisons à titre d'exemple une trajectoire admissible à itinéraire fixé en trois portions distinctes. Notons Λ_i , $i = 1, \dots, 3$ l'intersection des deux coupes de Poincaré utilisées pour construire la i ème partie de cette trajectoire. Il suffit alors de déterminer l'intersection $\Lambda_2 \cap P(\Lambda_1) \cap P^{-1}(\Lambda_3)$ où P est l'application de Poincaré associée à Λ_2 . Les points de cette intersection correspondent ainsi aux conditions initiales qui, intégrées à temps croissant et décroissant, fournissent les trajectoires

recherchées. Ces trajectoires étant naturelles, puisque directement déduites de la dynamique libre du problème des 3 corps restreint au voisinage des points $L_{1,2}$, elles sont théoriquement gratuites du point de vue énergétique, c'est-à-dire qu'elles ne nécessitent aucune manoeuvre spécifique pour être réalisées.

Mentionnons également le calcul d'une trajectoire Terre-Lune à faible coût, proposée par l'équipe de J. Marsden dans [40]. Pour tenir compte des perturbations dues au Soleil, mais plutôt que de se placer dans le problème encore relativement méconnu des quatre corps, on utilise le modèle de deux systèmes à trois corps couplés. La *section terrestre* désigne la section de Poincaré de la Terre $\{x = 1 - \mu_{ST}\}$, μ_{ST} étant le ratio des masses du système Terre-Lune, qui relie les deux environnements. L'idée est alors de calculer l'intersection entre la coupe de Poincaré de la variété stable d'une orbite périodique autour du point L_2 du système Terre-Lune associée à la section terrestre et et la coupe de Poincaré de la variété instable d'une orbite périodique autour du point L_1 ou L_2 du système Soleil-Terre et la même section. A nouveau, les points contenus dans cette intersection constituent les conditions initiales d'orbites qui convergent en $\pm\infty$ vers les régions souhaitées du mouvement. Outre la structure de variétés invariantes, cette méthode utilise en particulier la propriété de *twisting* des orbites, précisément décrite dans [39], afin de déterminer une trajectoire qui soit de plus issue d'une orbite raisonnablement choisie autour de la Terre.

Les collections d'orbites naturelles que nous avons présentées dans cette section sont d'un grand intérêt pour l'élaboration de missions spatiales à faible propulsion. Leur découverte est le fruit de l'étude des caractéristiques des points d'équilibre du problème restreint des trois corps, qui relève de la théorie des systèmes dynamiques. C'est pour proposer une approche complémentaire du problème de réduction des coûts énergétiques des transferts Terre-Lune que nous avons orienté nos recherches vers la théorie du contrôle optimal dont l'objet est de déterminer les solutions d'un système commandé, satisfaisant des conditions aux deux bouts et minimisant un certain coût. Les équations du mouvement que nous avons été amenés à considérer dépendent par conséquent d'un paramètre dynamique appelé *contrôle*. Ce sont les *équations du problème restreint des 3-corps plan contrôlé* et nous les introduisons maintenant.

1.2.7 le problème restreint des 3-corps plan contrôlé

Les équations du problème restreint des 3-corps plan contrôlé sont obtenues par l'ajout d'un terme de contrôle à chaque ligne du système 1.4. Elles s'écrivent donc simplement

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} + u_1 \\ \dot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} + u_2 \end{aligned} \tag{1.26}$$

et, en appliquant le changement de variable 1.30, peuvent être formulées sous la forme hamiltonienne

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{1.27}$$

où la fonction hamiltonienne H est donnée par

$$H(q, p) = H_p(q, p) - q_1 u_1 - q_2 u_2 \quad (1.28)$$

et H_p est le Hamiltonien du mouvement libre défini en 1.7. Dans le but de déterminer des transferts Terre-Lune à poussée faible, nous nous sommes intéressés aux trajectoires solutions du système 1.26 dont les conditions initiales et finales doivent respectivement caractériser des orbites terrestres et lunaires. La poussée appliquée au satellite à un instant t pouvant être modélisée par la norme $L^2(\mathbb{R}^2)$ du contrôle $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$, nous avons focalisé notre étude sur la minimisation de deux coûts distincts. L'un est logiquement la minimisation du coût énergétique le long d'une trajectoire,

$$\min_{u(\cdot) \in \mathbb{R}^2} \int_{t_0}^{t_f} u_1^2 + u_2^2 dt,$$

où t_0 est le temps initial et t_f est fixé et désigne le temps de transfert. L'autre est la minimisation de ce temps de transfert

$$\min_{u(\cdot) \in B_{\mathbb{R}^2}(0, \epsilon)} \int_{t_0}^{t_f} dt$$

où ϵ désigne la poussée maximale autorisée, autrement dit le rayon du disque de \mathbb{R}^2 dans lequel on impose au contrôle u d'être contenu, qui doit être d'un ordre de grandeur comparable à une propulsion significativement faible. Les principaux outils géométriques et numériques de la théorie du contrôle optimal auxquels nous avons eu recours pour traiter ces problèmes sont introduits dans le chapitre 2. Leurs applications au problème restreint des 3-corps plan et les résultats que nous avons obtenus sont résumés dans la section 3.1 du chapitre 3 et sont présentés avec précision dans les articles *Geometric and numerical techniques in optimal orbital transfer using low propulsion* [10] et *Shooting and numerical continuation methods for computing time-minimal and energy-minimal trajectories in the Earth-Moon system using low propulsion* [51] qui figurent dans ce manuscrit.

1.3 Le problème restreint des 3 corps spatial

L'extension du problème plan au problème spatial permet de considérer la dynamique dans la troisième direction qui est importante quand le satellite approche une des primaires. Cette prise en compte est en outre essentielle, comme cela est souligné dans [41], pour le bon fonctionnement des relais de communications spatiaux qui est conditionné par l'inclinaison de leur plan orbital. Citons également la nécessité d'étudier le problème spatial afin de coupler plusieurs systèmes à trois corps non-coplanaires, comme le sont en particulier les système Soleil-Terre-satellite et Terre-Lune-satellite. L'augmentation des degrés de liberté du modèle, plus précis et en ce sens davantage réaliste, induit certaines complications géométriques [41]. Cependant, nous verrons que les résultats présentés au long de la section 1.2 peuvent être généralisés au cas du problème spatial. La structure de variétés invariantes étant préservée, il est intéressant d'étudier son influence sur les transferts à énergie minimale au voisinage du point L_1 qui joue le rôle crucial de passerelle de l'influence terrestre vers l'influence lunaire.

1.3.1 Equations du mouvement et points d'équilibre

Le problème spatial diffère du problème plan uniquement dans la mesure où l'on suppose que la particule de masse négligeable n'évolue plus uniquement dans le plan P défini par le mouvement circulaire des primaires mais dans \mathbb{R}^3 tout entier. En considérant la dynamique dans la direction z orthogonale au plan P et telle que le repère synodique $\{G, x, y, z\}$ soit positivement orienté, les équations 1.26 deviennent

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \ddot{z} &= \frac{\partial \Omega}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.29)$$

où le potentiel $-\Omega$ est défini identiquement à celui de la section 1.2.1 mais où les distances aux primaires sont

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2} \\ \rho_2 &= \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned}$$

Le changement de variable

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z, \quad p_1 = \dot{x} - y, \quad p_2 = \dot{y} + x, \quad p_3 = \dot{z} \quad (1.30)$$

induit les équations hamiltoniennes

$$\dot{q} = \frac{\partial H_s}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H_s}{\partial q} \quad (1.31)$$

où la fonction hamiltonienne H_s décrivant le mouvement libre du problème spatial s'écrit

$$H_s(q, p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + p_1 q_2 - p_2 q_1 - \frac{1 - \mu}{\rho_1} - \frac{\mu}{\rho_2}. \quad (1.32)$$

On obtient ainsi, de la même manière que dans la section 1.2.2, l'expression de l'énergie intégrale du mouvement

$$E^s(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} - \Omega(x, y, z)$$

qui conduit à la définition de la surface d'énergie

$$M(\mu, e) = \{(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \mid E(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = e\}$$

comme sous-variété de \mathbb{R}^6 de dimension 5 contenant, pour une valeur fixée de μ , les trajectoires correspondantes au niveau d'énergie e . L'intersection de la région de Hill

$$H(\mu, e) = \{(x, y, z) \mid \Omega(x, y, z) + e \geq 0\}.$$

avec le plan (x, y) fournit alors les mêmes portraits topologiques des régions possibles du mouvement que ceux représentés sur la figure 1.2. Les niveaux

d'énergies critiques e_1, \dots, e_4 sont de mêmes valeurs que dans problème plan et correspondent également aux niveaux d'énergie des points d'équilibre du problème spatial. Ces points d'équilibre appartiennent au plan (x, y) ; on distingue, comme dans le problème plan, les trois points colinéaires L_1, L_2, L_3 et les deux points équilatéraux L_4 et L_5 . Leur position, identique à celle calculée en section 1.2.3, est déterminée en suivant la même méthode.

1.3.2 Dynamique au voisinage des points colinéaires

Pour étudier la dynamique du problème spatial au voisinage d'un point colinéaire L_i , $i = 1, 2$ ou 3 , on translate l'origine du repère synodique en L_i et on normalise le système de coordonnées de telle sorte que la distance de L_i à la plus proche des primaires soit égale à 1. Les nouvelles coordonnées \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} proviennent donc du changement de variables

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x + \mu + a_i}{\gamma_i} \\ \bar{y} &= \frac{y}{\gamma_i} \\ \bar{z} &= \frac{z}{\gamma_i}\end{aligned}\tag{1.33}$$

où les constantes a_i sont définies par $a_1 = -1 + \gamma_1$, $a_2 = -1 - \gamma_2$, $a_3 = \gamma_3$ et γ_i désigne la distance du point L_i à la primaire la plus proche. Pour alléger les notations, nous conserverons dans les lignes qui suivent les symboles x , y et z pour désigner les variables du système normalisé. De cette façon, les équations du mouvement 1.29 peuvent être exprimées au moyen de séries formelles sous la forme

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} - (1 + c_2)x &= \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right), \\ \ddot{y} + 2\dot{x} + (c_2 - 1)y &= \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right) \\ \ddot{z} + 2c_2 z &= \frac{\partial}{\partial z} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right)\end{aligned}\tag{1.34}$$

où P_n représente le polynôme de Legendre d'ordre n , $\rho = x^2 + y^2 + z^2$ et les coefficients c_n sont donnés par

$$\begin{aligned}c_n(\mu) &= \frac{1}{\gamma_i^3} \left((\pm 1)^n \mu + (-1)^n \frac{(1 - \mu)\gamma_i^{n+1}}{(1 \mp \gamma_i)^{n+1}} \right) \text{ pour } L_{1,2}, \\ c_n(\mu) &= \frac{(-1)^n}{\gamma_i^3} \left(1 - \mu + \frac{\mu\gamma_3^{n+1}}{(1 + \gamma_3)^{n+1}} \right) \text{ pour } L_3\end{aligned}$$

où dans la première équation le signe du haut vaut pour L_1 et celui du bas pour L_2 . Le changement de variable 1.30 permet alors évidemment d'obtenir la formulation hamiltonienne des équations 1.34. Le Hamiltonien correspondant s'écrit

$$H_L(q, p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + p_1 q_2 - p_2 q_1 - \frac{1 - \mu}{\rho_1} - \sum_{n \geq 2} c_n \rho^n P_n\left(\frac{q_1}{\rho}\right).\tag{1.35}$$

En éliminant les termes non-linéaires figurant au sein du système 1.34, on obtient les équations linéarisées du problème spatial au voisinage du point L_i

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} - (1 + c_2)x &= 0 \\ \ddot{y} + 2\dot{x} + (c_2 - 1)y &= 0 \\ \ddot{z} + 2c_2z &= 0. \end{aligned} \quad (1.36)$$

et le Hamiltonien 1.35 devient

$$H_L^2(q, p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + q_2p_1 - q_1p_2 - \frac{c_2}{2}(2q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) \quad (1.37)$$

On cherche alors à identifier un changement de coordonnées canonique, c'est-à-dire qui préserve le formalisme hamiltonien des équations linéarisées 1.36. Il suffit pour cela, voir [35], de déterminer un changement de variable symplectique des coordonnées $(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$, à savoir une matrice $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^6)$ satisfaisant l'égalité

$$A^T J A = J \quad (1.38)$$

où J est la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & Id_{\mathbb{R}^2} \\ -Id_{\mathbb{R}^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque la direction verticale est découplée des directions planaires dans le système 1.36, on se restreint dans un premier temps à calculer un changement symplectique des coordonnées (q_1, q_2, p_1, p_2) . On s'intéresse donc à la fonction hamiltonienne

$$H_L^2(q, p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + q_2p_1 - q_1p_2 - \frac{c_2}{2}(2q_1^2 - q_2^2) \quad (1.39)$$

que l'on note comme 1.37 par souci de simplification. Les équations du mouvement associées s'écrivent sous la forme du système linéaire

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ p_x \\ p_y \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2c_2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -c_2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est relativement simple, voir [36], de montrer que la matrice M possède deux valeurs propres réelles et deux valeurs propres imaginaires pures, notées $\pm\lambda_1$ et $\pm i\omega_1$, associées aux vecteurs propres

$$\begin{aligned} u_{\lambda_1} &= (2\lambda_1, \lambda_1^2 - 2c_2 - 1, \lambda_1^2 + 2c_2 + 1, \lambda_1^3 + (1 - 2c_2)\lambda_1), \\ u_{-\lambda_1} &= (-2\lambda_1, \lambda_1^2 - 2c_2 - 1, \lambda_1^2 + 2c_2 + 1, -\lambda_1^3 - (1 - 2c_2)\lambda_1), \\ u_{i\omega_1} &= (0, -\omega_1^2 - 2c_2 - 1, -\omega_1^2 + 2c_2 + 1, 0), \\ u_{-i\omega_1} &= (2\omega_1, 0, 0, -\omega_1^3 + (1 - 2c_2)\omega_1). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Le changement de variables défini par la matrice $C = (u_{\lambda_1}, u_{-\lambda_1}, u_{i\omega_1}, u_{-i\omega_1})$ vérifie alors l'égalité

$$C^T J C = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}$$

où D est donnée par

$$D = \begin{pmatrix} d_{\lambda_1} & 0 \\ 0 & d_{\omega_1} \end{pmatrix}$$

et d_{λ_1} et d_{ω_1} sont les deux constantes strictement positives pour $0 < \mu < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} d_{\lambda_1} &= 2\lambda_1((4 + 3c_2)\lambda_1^2 + 4 + 5c_2 - 6c_2^2), \\ d_{\omega_1} &= \omega_1((4 + 3c_2)\omega_1^2 - 4 - 5c_2 + 6c_2^2). \end{aligned}$$

Pour que C définisse une transformation symplectique, il suffit donc de diviser ses deux premières colonnes par $s_1 = \sqrt{d_{\lambda_1}}$ et ses deux dernières par $s_2 = \sqrt{d_{\omega_1}}$. Le changement de coordonnées final doit alors tenir compte de la direction verticale. Puisque $c_2 > 1$, on pose $\omega_2 = \sqrt{c_2}$. Ainsi la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2\lambda_1}{s_1} & 0 & 0 & -\frac{2\lambda_1}{s_1} & \frac{2\omega_1}{s_2} & 0 \\ \frac{\lambda_1^2 - 2c_2 - 1}{s_1} & \frac{-\omega_1^2 - 2c_2 - 1}{s_2} & 0 & \frac{\lambda_1^2 - 2c_2 - 1}{s_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\omega_2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda_1^2 + 2c_2 + 1}{s_1} & \frac{-\omega_1^2 + 2c_2 + 1}{s_2} & 0 & \frac{\lambda_1^2 + 2c_2 + 1}{s_1} & 0 & 0 \\ \frac{\lambda_1^3 + (1 - c_2)\lambda_1}{s_1} & 0 & 0 & \frac{-\lambda_1^3 - (1 - c_2)\lambda_1}{s_1} & \frac{-\omega_1^3 + (1 - c_2)\omega_1}{s_1} & \frac{\lambda_1^2 + 2c_2 + 1}{s_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\omega_2}} \end{pmatrix}$$

est un changement de variable symplectique qui, en conservant les symboles q et p pour désigner les nouvelles coordonnées, transforme l'expression du Hamiltonien 1.35 en

$$H = \lambda_1 q_1 p_1 + \frac{\omega_1}{2} (q_2^2 + p_2^2) + \frac{\omega_2}{2} (q_3^2 + p_3^2). \quad (1.42)$$

Les équations linéarisées 1.36 s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \lambda_1 q_1, & \dot{p}_1 &= -\lambda_1 p_1, \\ \dot{q}_2 &= \omega_1 p_2, & \dot{p}_2 &= -\omega_1 q_2, \\ \dot{q}_3 &= \omega_2 p_3, & \dot{p}_3 &= -\omega_2 q_3, \end{aligned} \quad (1.43)$$

et leurs solutions sont explicitement données par

$$\begin{aligned} q_1(t) &= q_1^0 \exp^{\lambda_1 t}, \\ p_1(t) &= p_1^0 \exp^{-\lambda_1 t}, \\ q_2(t) + ip_2(t) &= (q_2^0 + ip_2^0) \exp^{-i\omega_1 t}, \\ q_3(t) + ip_3(t) &= (q_3^0 + ip_3^0) \exp^{-i\omega_2 t}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

où q_1^0 , p_1^0 , $q_2^0 + ip_2^0$ et $q_3^0 + ip_3^0$ sont les conditions initiales. Les points colinéaires du problème spatial sont par conséquent du type selle×centre×centre. En observant que les fonctions $q_1 p_1$, $q_2^2 + p_2^2$ et $q_3^2 + p_3^2$ sont des intégrales premières du mouvement, la dynamique dans leur voisinage peut être schématisée d'une manière similaire au cas plan. La région d'équilibre \mathcal{R} est déterminée par

$$H = h, \text{ et } |p_1 - q_1| \leq c \quad (1.45)$$

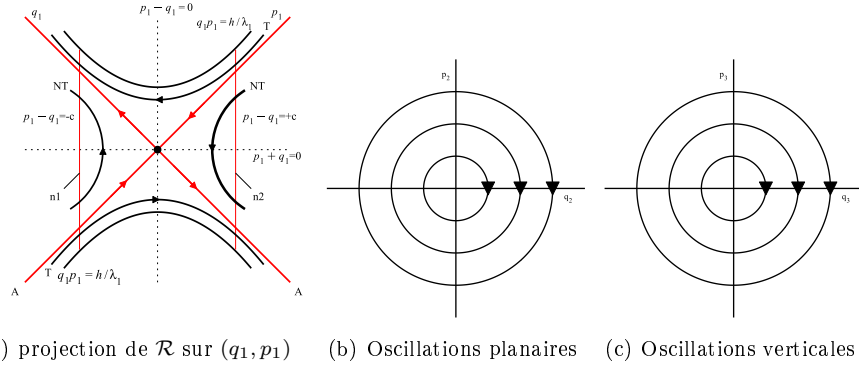


FIGURE 1.5 – Représentation du flot dans la région d'équilibre. (a) Projection des orbites sur le plan (q_1, p_1) (les axes sont tournés de 45°). Le point central représente la 3-sphère d'orbites périodiques et quasi-périodiques. Les droites notées A et les branches d'hyperboles notées T et NT sont les projections respectives des orbites asymptotiques, de transit et de non-transit. (b) Projection de l'oscillateur harmonique sur le plan (q_2, p_2) . (c) Projection de l'oscillateur harmonique sur le plan (q_3, p_3) .

où h et c sont deux constantes positives. Ainsi, pour chaque valeur de $p_1 - q_1$ comprise dans l'intervalle $[-c, c]$, l'égalité $H = h$ détermine la 4-sphère

$$\frac{\lambda}{4}(q_1 + p_1)^2 = h + \frac{\lambda}{4}(p_1 - q_1)^2 - \frac{\omega_1}{2}(q_2^2 + p_2^2) - \frac{\omega_2}{2}(q_3^2 + p_3^2). \quad (1.46)$$

ce qui implique que \mathcal{R} est homéomorphe au produit d'une 4-sphère et d'un intervalle. Comme dans la section 1.2.5, on note n_1 (resp. n_2) la sphère frontière pour laquelle la valeur $p_1 - q_1 = -c$ (resp. $p_1 - q_1 = c$). De même, la région de chaque 4-sphère définie par $p_1 + q_1 = 0$ est appelée équateur et les hémisphères nord et sud sont respectivement décrits par les inégalités $p_1 + q_1 > 0$ et $p_1 + q_1 < 0$.

On représente le flot dans \mathcal{R} en projetant les solutions du système 1.43 sur le plan (p_1, q_1) et le sous-espace $(p_2, q_2) \times (p_3, q_3)$, voir [41] et la figure 1.5. La projection sur $(p_2, q_2) \times (p_3, q_3)$ offre le portrait de deux oscillateurs harmoniques découplés. La région \mathcal{R} se projette sur le domaine du plan (p_1, q_1) bordé par les branches d'hyperboles $p_1 q_1 = \frac{h}{\lambda_1}$ et les segments $p_1 - q_1 = \pm c$ correspondant aux sphères frontières. Chaque solution est représentée par une branche d'hyperbole $p_1 q_1 = \text{constante} \in [-c, c]$, excepté lorsque $p_1 q_1 = 0$. Chaque point d'une projection correspond à une 3-sphère d'équation

$$\frac{\omega_1}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \frac{\omega_2}{2}(q_3^2 + p_3^2) = h - \lambda q_1 p_1. \quad (1.47)$$

On distingue ainsi, comme dans le cas planaire, 9 classes d'orbites regroupées en 4 catégories :

1. Le point $p_1 = q_1 = 0$ est la projection d'une 3-sphère d'orbites périodiques et quasi-périodiques autour de L_i , notée S_h^3 et définie par

$$\frac{\omega_1}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \frac{\omega_2}{2}(q_3^2 + p_3^2) = h, \quad p_1 = q_1 = 0.$$

2. les couples de demi-droites $q_1 = 0, p_1 \neq 0$ et $p_1 = 0, q_1 \neq 0$ correspondent respectivement aux branches de variété stable $W_{\pm}^s(S_h^3)$ et variété instable $W_{\pm}^u(S_h^3)$ de S_h^3 définies par

$$W_{\pm}^s(S_h^3) = \left\{ \frac{\omega_1}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \frac{\omega_2}{2}(q_3^2 + p_3^2) = h, q_1 = 0, p_1 \gtrless 0 \right\},$$

$$W_{\pm}^u(S_h^3) = \left\{ \frac{\omega_1}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \frac{\omega_2}{2}(q_3^2 + p_3^2) = h, p_1 = 0, q_1 \gtrless 0 \right\}.$$

Ces variétés sont des cylindres contenant les orbites convergeant asymptotiquement vers S_h^3 en temps croissant et décroissant.

3. Les branches d'hyperboles données par $q_1 p_1 > 0$ sont les projections de cylindres d'orbites parcourant la région d'équilibre d'une sphère frontière à l'autre. Ces orbites appartiennent exclusivement à l'hémisphère nord si elles se dirigent de n_2 vers n_1 et à l'hémisphère sud sinon. Elles forment l'ensemble des orbites de transit.
4. Enfin, les branches d'hyperboles correspondant à $q_1 p_1 < 0$ représentent des cylindres d'orbites se déplaçant d'un hémisphère à l'autre mais dont les extrémités appartiennent à la même sphère frontière. Si $q_1 > 0$, cette sphère est n_1 et les orbites passent de l'hémisphère sud à l'hémisphère nord. Si $q_1 < 0$, la sphère est n_2 et les orbites évoluent de l'hémisphère nord à l'hémisphère sud. Ce sont les orbites de non-transit.

La structure de variétés invariantes peut donc être étendue à la description du flot au voisinage des points colinéaires du problème spatial. Les variétés stables et instables jouent, tout comme dans le problème plan, un rôle de séparatrice entre orbites de transit et orbites de non-transit. Leur utilisation est en ce sens efficace pour traiter du problème de calcul de trajectoires à faible coût énergétique. Il figure notamment dans [29] une généralisation au cas spatial de la méthode de construction d'orbites naturelles à itinéraires prédéfinis présentée en section 1.2.6. Du point de vue géométrique, ces constructions sont plus complexes que dans le cas plan car les coupes de Poincaré à prendre en considération sont des 3-sphères topologiques dont il est délicat de déterminer les intersections.

Il est important de préciser que la dynamique non-linéaire dans la région \mathcal{R} est qualitativement la même que la dynamique linéaire. Dans ce cas, la 3-sphère S_h^3 se généralise en la variété

$$\mathcal{M}_h^3 = \left\{ (q, p) \mid \frac{\omega_1}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \frac{\omega_2}{2}(q_3^2 + p_3^2) + f(q_2, p_2, q_3, p_3) = h, p_1 = q_1 = 0 \right\}$$

où f est au moins d'ordre 3. Elle admet alors les variétés stables et instables

$$W_{\pm}^s(\mathcal{M}_h^3) = \left\{ \frac{\omega_1}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \frac{\omega_2}{2}(q_3^2 + p_3^2) + f(q_2, p_2, q_3, p_3) = h, q_1 = 0, p_1 \gtrless 0 \right\},$$

$$W_{\pm}^u(\mathcal{M}_h^3) = \left\{ \frac{\omega_1}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \frac{\omega_2}{2}(q_3^2 + p_3^2) + f(q_2, p_2, q_3, p_3) = h, p_1 = 0, q_1 \gtrless 0 \right\}.$$

Ajoutons de plus que dans un petit voisinage de L_1 , les variétés invariantes de la dynamique linéaire sont de très acceptables approximations des variétés invariantes de la dynamique non linéaire, les termes d'ordre non-linéaires étant négligeables devant ceux linéaires.

1.3.3 Le problème spatial contrôlé au voisinage de L_1

Comme nous l'avons mentionné au début de la section , notre troisième objectif a été d'évaluer l'impact de la structure de variétés invariantes sur le calcul de trajectoires à poussée faible au voisinage de L_1 . Plus précisément, nous avons cherché à déterminer des trajectoires énergie-minimales entre la branche $W_+^s(S_h^3)$ de la variété stable et la branche la branche $W_+^u(S_h^3)$ de la variété instable de ce point . Ces trajectoires peuvent en fait être considérées comme des portions de transferts Terre-Lune utilisant la structure de variétés invariantes pour tenter de minimiser la consommation énergétique lors du passage du domaine intérieur vers le domaine extérieur. Elles sont solutions des équations du mouvement contrôlé autour de L_1

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} - (1 + c_2)x &= \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right) + u_1 \\ \ddot{y} + 2\dot{x} + (c_2 - 1)y &= \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right) + u_2 \\ \ddot{z} + 2c_2 z &= \frac{\partial}{\partial z} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right) + u_3 \end{aligned} \quad (1.48)$$

obtenues à partir du système 1.34 et minimisent le coût en énergie

$$\int_{t_0}^{t_f} u_1(t)^2 + u_2(t)^2 + u_3(t)^2 dt. \quad (1.49)$$

L'article *Energy-minimal transfers in the vicinity of the Lagrangian point L_1* [52] fournit les développements et résultats de cette étude et la section 3.2 du chapitre 3 en offre un résumé. Les résultats fondamentaux de la théorie du contrôle qui y sont utilisés sont les mêmes que ceux employés pour calculer les trajectoires Terre-Lune temps-minimales et énergie-minimales du problème plan. Le chapitre suivant leur est consacré.

Chapitre 2

Outils géométriques et numériques en contrôle optimal.

2.1 Définition du problème

Considérons un problème général de contrôle optimal défini comme suit. Soient M et U deux variétés lisses de dimensions respectives n et m . On s'intéresse au système de contrôle sur M

$$\dot{q}(t) = f(q(t), u(t)) \quad (2.1)$$

où $f : M \times U \rightarrow TM$ est lisse et les contrôles u sont des fonctions mesurables et bornées définies sur un intervalle $[t_0, t(u)[\subset \mathbb{R}^+$ à valeurs dans U . Rappelons tout d'abord trois définitions fondamentales.

Définition 2.1.1. Soit $q_0 \in M$. L'ensemble accessible en temps t_f pour le système 2.1 depuis q_0 , noté $Acc(q_0, t_f)$, est l'ensemble des valeurs au temps t_f des solutions du système 2.1 partant de q_0 au temps t_0 et associées à un contrôle u tel que $t(u) > t_f$.

Définition 2.1.2. Le système 2.1 est dit contrôlable en temps t_f depuis $q_0 \in M$ si

$$M = Acc(q_0, t_f).$$

Il est dit contrôlable depuis q_0 si

$$M = \bigcup_{t \geq 0} Acc(q_0, t).$$

Définition 2.1.3. Soient M_0 et M_1 deux sous-ensembles de M et $t_f > t_0$. L'ensemble \mathcal{U}_{t_f} des contrôles admissibles sur $[t_0, t_f]$ est défini comme l'ensemble des contrôles u tels que $t(u) > t_f$ dont les trajectoires associées relient un point initial dans M_0 à un point final de M_1 .

Définissons par

$$C(t_f, u) = \int_{t_0}^{t_f} f^0(x(t), u(t)) dt \quad (2.2)$$

où $f^0 : M \times U \rightarrow \mathbb{R}$ est supposée lisse, le coût associé à un contrôle admissible sur $[t_0, t_f]$. Considérons alors le problème de contrôle optimal consistant à déterminer une trajectoire $q(\cdot)$ solution de 2.1 et associée à un contrôle u admissible sur $[t_0, t_f]$ telle que $q(0) \in M_0$, $q(t_f) \in M_1$ et le coût 2.2 soit minimisé. Introduisons la notion suivante qui nous sera utile dans la section 2.3 pour énoncer les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité du second ordre.

Définition 2.1.4. Soient $q_0 \in M$ et $t_f > t_0$. L'application *entrée-sortie* du système 2.1 est l'application

$$\begin{aligned} E_{q_0, t_f} : \mathcal{U}_{t_f} &\longrightarrow M \\ u &\longrightarrow q(q_0, t_f, u) \end{aligned} \quad (2.3)$$

où $t \rightarrow q(q_0, t, u)$ est la trajectoire solution de 2.1 associée au contrôle u telle que $q(q_0, 0, u) = q_0$

Remarquons que, pour $q_0 \in M$ fixé, l'image de l'application entrée-sortie au temps t_f est égale à l'ensemble accessible en temps t_f depuis q_0 . Si \mathcal{U} est doté de la topologie de L^∞ alors l'application entrée-sortie est lisse. Soit $q(\cdot)$ une trajectoire du système 2.1 associée au contrôle lisse u sur $[t_0, t_f]$. Alors le contrôle u peut être prolongé de manière lisse à l'intervalle $[t_0, t_f + \epsilon]$ où $\epsilon > 0$.

Définition 2.1.5. On considère deux cas distincts.

- Si le temps final t_f est fixé, $q(\cdot)$ est dite *localement optimale* pour la topologie L^∞ (resp. *localement optimale* pour pour la topologie C^0) si elle est optimale dans un voisinage de u pour la topologie L^∞ (resp. dans un voisinage de $q(\cdot)$ pour la topologie C^0).
- Si le temps final t_f n'est pas fixé, $q(\cdot)$ est dite *localement optimale* pour la topologie L^∞ si pour tout voisinage V de u dans $L^\infty([t_0, t_f + \epsilon], U)$, pour tout réel η tel que $|\eta| \leq \epsilon$ et pour tout contrôle $v \in V$ satisfaisant $E(q_0, t_f + \eta, v) = E(q_0, t_f, u)$, on ait $C(t_f + \eta, v) \geq C(t_f, u)$. De plus $q(\cdot)$ est dite *localement optimale* pour la topologie C^0 si pour tout voisinage W de $q(\cdot)$ dans M , pour tout réel η tel que $|\eta| \leq \epsilon$ et pour toute trajectoire y associée à un contrôle v sur $[t_0, t_f + \eta]$ contenue dans W et satisfaisant $y(0) = q_0$ et $y(t_f + \eta) = q(t_f)$, on ait $C(t_f + \eta, v) \geq C(t_f, u)$

2.2 Le principe du maximum

Le principe du maximum de Pontryagin, qui fournit une condition nécessaire d'optimalité, est le résultat fondateur de la théorie moderne du contrôle optimal. Nous l'énonçons ici sous une forme assez générale qui correspond aux problèmes de contrôle optimal traités au cours de nos travaux de recherche. Il admet néanmoins des extensions à de plus larges classes de dynamiques et de critères à minimiser, voir [55, 61].

Théorème 2.2.1 (Principe du maximum de Pontryagin). *Considérons le système de contrôle 2.1 et le coût 2.2. Si le contrôle u est optimal alors il existe*

un réel $p^0 \in \mathbb{R}_-^*$ et une application $p(\cdot)$ absolument continue sur $[t_0, t_f]$ vérifiant $p(t) \in T_{x(t)}^*M$ tels que le couple (p^0, p) soit non trivial et presque partout sur $[t_0, t_f]$ on ait

$$\begin{aligned}\dot{q}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p^0, p(t), u(t)) \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial q}(q(t), p^0, p(t), u(t))\end{aligned}\tag{2.4}$$

où H est l'application définie par

$$\begin{aligned}H : T^*M \times \mathbb{R}_-^* \times U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (q(t), p(t), p^0, u) &\longrightarrow p^0 f^0(q(t), u(t)) + \langle p(t), f(q(t), u(t)) \rangle.\end{aligned}$$

Le principe du maximum assure en outre la condition de maximisation

$$H(q(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in U} H(q(t), p(t), p^0, v)\tag{2.5}$$

presque partout sur l'intervalle $[t_0, t_f]$. Si le temps de transfert t_f n'est pas fixé, l'égalité

$$\max_{v \in U} H(q(t), p(t), p^0, v) = 0\tag{2.6}$$

est de plus vérifiée pour tout $t \in [t_0, t_f]$. Enfin, si M_0 (resp. M_1) est une sous-variété régulière de M , l'application $p(\cdot)$ vérifie la condition de transversalité

$$p(0) \perp T_{q(0)}M_0 \text{ (resp. } p(t_f) \perp T_{q(t_f)}M_1).\tag{2.7}$$

Définition 2.2.1. L'application H est appelée *pseudo-Hamiltonien* et la forme linéaire p est appelée *état adjoint*. On appelle *extrémale* du problème de contrôle optimal défini par 2.1 et 2.2 un quadruplet $(q(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ solution des équations 2.4, 2.5 et, le cas échéant, 2.6. Si $p^0 = 0$, on dit que l'extrémale est *anormale*. Sinon on elle dite *normale*. Si de plus les conditions de transversalité sont satisfaites, l'extrémale est appelée *BC-extrémale*.

Puisque U est une variété lisse de dimension m on peut supposer, en utilisant le système de coordonnées locales, que localement $U = \mathbb{R}^m$. Ainsi, il vient de la condition maximisation 2.5 l'égalité $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$. Formulons l'hypothèse suivante.

(L)(condition stricte de Legendre) La forme quadratique $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}$ est définie négative le long de l'extrémale $(q(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$.

Le théorème des fonctions implicites assure alors qu'il existe un voisinage de u dans lequel les contrôles extrémaux sont des fonctions lisses de la forme

$$u_r(t) = u_r(q(t), p(t)).$$

Ceci induit la définition ci-dessous.

Définition 2.2.2. On définit le *Hamiltonien vrai*, également appelé *Hamiltonien réduit* et noté H_r , par

$$H_r(q, p) = H(q, p, u_r(q, p)).$$

Chaque extrémale est alors solution du système hamiltonien

$$\begin{aligned}\dot{q}(t) &= \frac{\partial H_r}{\partial p}(q(t), p(t)), \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H_r}{\partial q}(q(t), p(t))\end{aligned}\tag{2.8}$$

lequel, en posant $z = (q, p)$, s'écrit

$$\dot{z}(t) = \overrightarrow{H_r}(z(t)).\tag{2.9}$$

Comme nous l'avons déjà souligné au début de cette section, il existe de nombreuses formulations du principe du maximum, adaptées aux différentes classes de systèmes contrôlés, coûts et contraintes sur les contrôles admissibles. Pour clore cette section, énonçons ce résultat dans le cas d'un système de contrôle linéaire avec un coût quadratique, comme l'est en particulier le coût énergétique. Nous expliquerons dans la section 3.2 en quoi ce théorème nous a été utile pour initialiser les méthodes numériques de calcul de trajectoires énergie-minimales au voisinage du point L_1 .

Théorème 2.2.2 (Principe du maximum dans le cas linéaire quadratique). *Considérons le système contrôlé*

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)u$$

contrôlable sur \mathbb{R}^n où $A(t)$ et $B(t)$ sont deux matrices continues sur l'intervalle borné $[t_0, t_f]$ appartenant respectivement à $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. Définissons le coût

$$C_0(u) = \int_{t_0}^{t_f} z(s)^T W(s)z(s) + u(s)^T U(s)u(s) dt$$

où $W(s)$ et $U(s)$ sont deux matrices carrées continues et symétriques sur l'intervalle $[t_0, t_f]$. Supposons de plus que $W(s)$ et $U(s)$ soient respectivement semi-définie positive et positive pour tout $s \in [t_0, t_f]$. Soient G un sous-ensemble convexe compact non-vide de \mathbb{R}^n et $z_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors il existe un unique contrôle $u^(t)$ telle que la trajectoire associée $z^*(t)$ minimise le coût C et vérifie $z^*(0) = z_0$ et $z^*(t_f) \in G$. Plus précisément, il existe un état adjoint η^* tel que $z^*(t)$ et $\eta^*(t)$ soient solutions de*

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A(t)z + B(t)U(t)^{-1}B(t)^T \eta^T \\ \dot{\eta} &= z^T W(t) - \eta A(t)\end{aligned}\tag{2.10}$$

où $z^(t_0) = z_0$, $z^*(t_f) \in \partial G$ et $\eta^*(t_f)$ est intérieur et normal à G en $z^*(t_f)$. Le contrôle optimal u^* est alors donné par*

$$u^*(t) = U(t)^{-1}B(t)^T \eta^*(t)^T.\tag{2.11}$$

Le résultat suivant complète le principe du maximum dans le cas linéaire quadratique et permet d'exprimer le contrôle optimal sous la forme d'une boucle fermée.

Théorème 2.2.3. *Considérons le problème consistant à trouver une trajectoire solution de*

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A(t)x + B(t)u(t) \\ z(0) &= z_0 \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

minimisant le coût

$$C_0(u) = x(t_f)^T Q x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} z(s)^T W(s) z(s) + u(s)^T U(s) u(s) dt$$

où Q , $W(s)$ et $U(s)$ sont trois matrices carrées continues et symétriques sur l'intervalle $[t_0, t_f]$. Supposons de plus que $W(s)$ est semi-définie positive et que Q et $U(s)$ soient positives pour tout $s \in [t_0, t_f]$. Alors, pour tout $z_0 \in \mathbb{R}^n$ il existe une unique trajectoire optimale z^ associée au contrôle u^* . Ce contrôle se met sous forme de boucle fermée*

$$u(t) = U(t)^{-1} B(t)^T E(T) x(t) \quad (2.12)$$

où $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est solution sur $[t_0, t_f]$ de l'équation matricielle de Riccati

$$\begin{aligned}\dot{E}(t) &= W(t) - A(t)^T E(t) - E(t) A(t) - E(t) B(t) U^{-1}(t) B(t)^T E(t), \\ E(t_f) &= -Q.\end{aligned} \quad (2.13)$$

Le principe du maximum, puisse-t-il être formulé de la manière la plus générale possible, ne fournit qu'une condition nécessaire d'optimalité. On introduit donc la notion de temps conjugué géométrique qui est à la base d'une méthode du second ordre offrant une condition suffisante d'optimalité locale d'une extrémale.

2.3 Temps conjugués géométriques et conditions d'optimalité du second ordre

Considérons une variété lisse M de dimension n et notons $\Pi_q : T^*M \rightarrow M$ la projection canonique du fibré cotangent T^*M sur M . Soient \vec{H} un champ de vecteurs hamiltonien sur T^*M et $z(t) = (q(t), p(t))$ une trajectoire de \vec{H} définie sur un intervalle $[t_0, t_f]$. L'égalité $\dot{z}(t) = \vec{H}(z(t))$ est alors vérifiée pour tout $t \in [t_0, t_f]$. On note $\exp_t(\vec{H})$ le flot du champ de vecteurs \vec{H} .

Définition 2.3.1. L'équation variationnelle

$$\dot{\delta z}(t) = d\vec{H}(z(t))\delta z(t)$$

vérifiée sur $[t_0, t_f]$ est appelée *équation de Jacobi* le long de $z(\cdot)$. On appelle *champ de Jacobi* une solution $J(t)$ non triviale de l'équation de Jacobi le long de $z(\cdot)$ et on dit qu'il est *vertical* au temps t si $d\Pi_q(z(t)).J(t) = 0$. Un temps t_c est dit *géométriquement conjugué* si il existe un champ de Jacobi vertical en 0 et en t_c . Auquel cas, le point $q(t_c)$, est dit *conjugué* à $q(0)$.

Remarquons qu'en coordonnées locales, un champ de Jacobi peut s'écrire $J(t) = (\delta q(t), \delta p(t))$. La verticalité de J au temps t se traduit alors $\delta q(t) = 0$. La notion de temps conjugué admet la généralisation suivante.

Définition 2.3.2. Soit M_1 une sous-variété régulière de M . On note $M_1^\perp = \{(q, p) \mid q \in M_1, p \in T_q^*M_1\}$. On dit que $t_{foc} \in [t_0, T]$ est un *temps focal* si il existe un champ de Jacobi $J = (\delta q, \delta p)$ tel que $\delta q(t_{foc}) = 0$ et $J(t_{foc})$ est tangent à M_1^\perp .

Définition 2.3.3. Soit $z_0 \in T^*M$. Pour tout $t \in [t_0, t_f]$, on définit l'*application exponentielle* par

$$\exp_t : z_0 \longrightarrow \Pi_q(z(t, z_0))$$

où $z(t, z_0)$ est la trajectoire de \vec{H} satisfaisant $z(0, z_0) = z_0$.

Dans le système de coordonnées locales, puisque $z_0 = (q_0, p_0) \in T^*M$, on peut écrire $z(t, q_0, p_0) = (q(t, q_0, p_0), p(t, q_0, p_0))$. Si la condition initiale $q_0 \in M$ est fixée, l'application exponentielle s'écrit $\exp_{q_0, t}(p_0) = q(t, q_0, p_0)$. Rappelons quelques notions classiques de géométrie.

Définition 2.3.4. E un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension $2n$. On appelle *structure symplectique* linéaire sur E la donnée d'une *forme extérieure* ω , i.e multilinéaire et antisymétrique, de degré 2 et non-dégénérée, i.e qui vérifie l'égalité $\omega(x, y) = 0 \forall y \Rightarrow x = 0$.

Définition 2.3.5. Soit (N, ω) une variété symplectique de dimension $2n$. Une sous-variété régulière L de N est dite *isotrope* si son espace tangent est en tout point *isotrope*, i.e la restriction de $\omega(x)$ à $T_x L \times T_x L$ est nulle pour tout $x \in L$. Si de plus L est de dimension n , alors L est dite *Lagrangienne*.

La proposition suivante résulte d'une interprétation géométrique de l'équation de Jacobi.

Proposition 2.3.1. Soient $q_0 \in M$, $L_0 = T_{q_0}^*M = \mathbb{R}^4$ et $L_t = \exp_t(\vec{H})(L_0)$. Alors L_t est une sous-variété Lagrangienne de T^*M dont l'espace tangent est engendré par les champs de Jacobi dont la condition initiale appartient à L_0 . De plus $q(t_c)$ est géométriquement conjugué à q_0 si et seulement si l'application \exp_{q_0, t_c} n'est pas une immersion en p_0 .

Afin de formuler sans ambiguïté l'hypothèse de forte régularité nécessaire à l'obtention de la condition d'optimalité du second ordre dans le cas normal, nous énonçons la proposition suivante, voir [13].

Proposition 2.3.2. Soit $q_0 \in M$. Un contrôle extrémal est une singularité de l'application entrée-sortie quand l'ensemble des contrôles admissibles \mathcal{U} est considéré muni de la topologie L^∞ . De plus, pour tout $t \in [t_0, t_f]$, le vecteur adjoint $p(t)$ est orthogonal à l'image de la différentielle $D_u E_{q_0, t}$.

Supposons alors :

(S) (hypothèse de forte régularité) Soit $q_0 \in M$. Sur chaque sous-intervalle de $[t_0, t_f]$, le contrôle u est de codimension 1. Autrement dit, l'image de la différentielle $D_u E_{q_0, t}$ est de dimension $n - 1$.

On peut alors énoncer le résultat fondamental qui relie l'optimalité des extrémales et la notion de temps conjugué [1, 16, 56].

Théorème 2.3.1. Soit t_c^1 le premier temps conjugué géométrique le long de z . Sous les hypothèses (L) et (S), la trajectoire $q(\cdot)$ est localement optimale sur $[t_0, t_c^1]$ pour la topologie de L^∞ (et C^0 optimale dans le cas d'une extrémale normale); si $t > t_c^1$ alors la trajectoire $q(\cdot)$ n'est pas localement optimale sur $[t_0, t]$.

Dans les deux prochaines sections, nous présentons quelques résultats généraux relatifs à l'application du principe du maximum et des conditions du second ordre dans les problèmes de minimisation du temps de transfert et du coût énergétique, qui sont les deux critères auxquels nous nous sommes intéressés dans nos travaux.

2.4 Problème de temps minimal

2.4.1 Le cas normal

Pour coller au contexte spécifique de notre étude, on se limite à considérer le système contrôlé bi-entrées sur \mathbb{R}^n

$$\dot{q} = F_0(q) + \epsilon \sum_{i=1}^2 u_i F_i(q), \quad \epsilon > 0, \quad u_1^2 + u_2^2 \leq 1 \quad (2.14)$$

où les champs de vecteurs de \mathbb{R}^n F_0 , F_1 et F_2 sont supposés lisses. Comme nous l'avons déjà évoqué en section 1.2.7, le réel ϵ représente la borne imposée sur la norme du contrôle. On doit le choisir significativement petit si l'on recherche des trajectoires à faible propulsion. On s'intéresse au problème du temps minimal

$$\min_{u(\cdot) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}(0,1)} \int_{t_0}^{t_f} dt.$$

D'après le principe du maximum, les trajectoires optimales sont des projections d'extrémales $(q(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ solutions du système

$$\dot{q}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p^0, p(t), u(t)), \quad \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q}(q(t), p^0, p(t), u(t))$$

où H est le pseudo-Hamiltonien

$$H(q, p, u) = -p^0 + H_0(q, p) + \epsilon(u_1 H_1(q, p) + u_2 H_2(q, p))$$

et

$$H_i(q, p) = \langle p, F_i(q) \rangle, \quad i = 0, \dots, 2.$$

La condition de maximisation 2.5 implique que si $(H_1(q, p), H_2(q, p)) \neq (0, 0)$, le contrôle extrémal u est donné par

$$u_i = \frac{H_i}{\sqrt{H_1^2 + H_2^2}}, \quad i = 1, 2.$$

Plaçons-nous dans le cas normal où $p^0 \neq 0$. On peut effectuer la normalisation $p^0 = -1$ et obtenir ainsi le Hamiltonien vrai

$$H_r(z) = -1 + H_0(z) + \epsilon \sqrt{(H_1^2(z) + H_2^2(z))}.$$

où $z = (q, p)$. Le temps final t_f n'étant pas fixé, on sait que H_r est identiquement nul sur $[t_0, t_f]$ d'après l'égalité 2.6.

Définition 2.4.1. On appelle *surface de commutation* l'ensemble

$$\Sigma = \{z \in T^*\mathbb{R}^n, H_1(z) = H_2(z) = 0\}.$$

On appelle *point d'ordre 0* un élément $z \in T^*\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$ et *point d'ordre 1* un élément $z \in \Sigma$ tel que $(\dot{H}_1(z), \dot{H}_2(z)) \neq 0$.

En dehors de la surface de commutation, les contrôles extrémaux appartiennent donc au cercle unité $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$. Considérons le cas particulier où $q \in \mathbb{R}^4$. Pour mémoire, définissons la notion fondamentale de *crochet de Lie*, voir [5, 14].

Définition 2.4.2. Soient M une variété lisse de dimension n et X, Y deux champs de vecteurs lisses sur M . Le *crochet de Lie* de X et Y , noté $[X, Y]$, est le champ de vecteurs lisse sur M défini par convention par

$$[X, Y] = YX - XY,$$

soit, en coordonnées locales,

$$[X, Y](q) = \frac{\partial X}{\partial q}(q)Y(q) - \frac{\partial Y}{\partial q}(q)X(q).$$

Supposons que les champs de vecteurs F_0, F_1 et F_2 sont tels que $\mathcal{D} = \text{Vect}\{F_1, F_2\}$ soit *involutive*, c'est-à-dire que $[F_1, F_2] \subset \mathcal{D}$, et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^4$ le rang de la famille $\{F_1, F_2, [F_0, F_1], [F_0, F_2]\}$ soit égal à 4. On peut alors montrer le résultat suivant dont on trouvera une preuve complète dans [12].

Proposition 2.4.1. *En un point d'ordre 1, le contrôle u tourne instantanément d'un angle π . Autrement dit, on a l'égalité $u(t^+) = -u(t^-)$.*

On en déduit, sous forme de proposition, le corollaire suivant.

Proposition 2.4.2. *Chaque trajectoire temps-minimale est une concaténation d'un nombre fini d'arcs d'ordre 0 avec des π -singularités aux points de jonction.*

Nous expliquerons en section 3.1, que les équations du mouvement contrôlé du problème restreint des 3 corps plan peuvent être écrites sous la forme d'un système contrôlé bi-entrée sur \mathbb{R}^4 avec des champs de vecteurs F_0, F_1 et F_2 lisses. La proposition 2.4.2 nous a ainsi fourni la justification théorique du principe de la continuation numérique que nous avons utilisée pour calculer des transferts Terre-Lune à temps minimal d'ordre 0.

2.4.2 Le cas anormal

Les résultats relatifs au cas anormal du problème du temps minimal que nous présentons dans cette section sont issus de [16] où figurent également leur démonstration détaillée. Rappelons tout d'abord la méthode classique qui permet d'exprimer un système contrôlé bi-entrée sous la forme équivalente d'un système mono-entrée via une *transformation de Goh*. Fixons $\epsilon > 0$ et considérons le système bi-entrée sur \mathbb{R}^n

$$\dot{q} = F_0(q) + \epsilon \sum_{i=1}^2 u_i F_i(q), \quad q \in \mathbb{R}^n, \quad u_1^2 + u_2^2 = 1$$

dont le pseudo-Hamiltonien correspondant s'écrit

$$H(q, p, u) = H_0(q, p) + u_1 H_1(q, p) + u_2 H_2(q, p)$$

comme nous l'avons déjà vu dans la section 2.4.1. En utilisant la paramétrisation

$$u_1 = \cos \alpha, \quad u_2 = \sin \alpha,$$

le système devient

$$\dot{q} = F_0(q) + \epsilon \cos \alpha F_1(q) + \epsilon \sin \alpha F_2(q), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

et en considérant la variable augmentée

$$\tilde{q} = \begin{pmatrix} q \\ \alpha \end{pmatrix},$$

il se réécrit sous la forme du système mono-entrée

$$\dot{\tilde{q}} = \tilde{F}_0(\tilde{q}) + v \tilde{F}_1(\tilde{q}) \quad (2.15)$$

où

$$\tilde{F}_0(\tilde{q}) = \begin{pmatrix} F_0(q) + \epsilon \cos \alpha F_1(q) + \epsilon \sin \alpha F_2(q) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}_1(\tilde{q}) = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{R}^4} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \dot{\alpha}.$$

Définition 2.4.3. Soit M une variété lisse de dimension n . Le *crochet de Poisson* de deux fonctions hamiltoniennes H_1 et H_2 sur M est défini par

$$\{H_1, H_2\} = dH_1(\overrightarrow{H_2})$$

soit, en coordonnées canoniques (q, p) ,

$$\{H_1, H_2\}(q, p) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H_1}{\partial q_i} \frac{\partial H_2}{\partial p_i} - \frac{\partial H_1}{\partial p_i} \frac{\partial H_2}{\partial q_i} \right).$$

On peut alors énoncer le théorème suivant.

Théorème 2.4.1. *Les extrémales singulières du système $(\tilde{F}_0, \tilde{F}_1)$ et le contrôle*

$$\tilde{u}(\tilde{z}) = - \frac{\{\{H_{\tilde{F}_1}, H_{\tilde{F}_0}\}, H_{\tilde{F}_0}\}}{\{\{H_{\tilde{F}_1}, H_{\tilde{F}_0}\}, H_{\tilde{F}_1}\}}$$

sont les courbes intégrales du champ de vecteurs hamiltonien lisse $\tilde{H}_r(\tilde{z})$ de l'espace des contraintes

$$H_{\tilde{F}_1} = \{H_{\tilde{F}_1}, H_{\tilde{F}_0}\} = 0,$$

où

$$H_{\tilde{F}_0} = \langle \tilde{p}, \tilde{F}_0 \rangle, \quad H_{\tilde{F}_1} = \langle \tilde{p}, \tilde{F}_1 \rangle.$$

Elles correspondent aux extrémales singulières du système d'origine.

La proposition suivante fournit une condition nécessaire et suffisante d'optimalité locale d'une trajectoire dans le cas anormal.

Proposition 2.4.3. *Sous des conditions génériques, une extrémale anormale est localement temps-minimale jusqu'au premier temps conjugué noté t_{cc}^1 .*

Le calcul de t_{cc}^1 le long d'une extrémale anormale prend en compte la condition $H_{\tilde{F}_0} = 0$ et diffère par conséquent du calcul du premier temps conjugué t_c^1 correspondant au cas normal. Le résultat suivant offre une comparaison entre ces deux temps.

Théorème 2.4.2. *Le long d'une extrémale anormale, on a $t_0 < t_{cc}^1 < t_c^1$.*

Nous fournissons notamment une vérification numérique de ce résultat dans le contexte du problème de minimisation du temps de transfert Terre- L_1 , voir la section 3.1.

2.5 Problème de minimisation de l'énergie

Dans le problème de la minimisation du coût énergétique, la borne sur la norme du contrôle peut être relaxée. Considérons donc le système de contrôle bi-entrée sur \mathbb{R}^n

$$\dot{q} = F_0(q) + \sum_{i=1}^2 u_i F_i(q), \quad u \in \mathbb{R}^2$$

et intéressons-nous à la minimisation du coût

$$\int_{t_0}^{t_f} u_1^2 + u_2^2 dt$$

où le temps de transfert t_f est supposé fixé. Le pseudo-Hamiltonien donné par le principe du maximum s'écrit alors

$$H(z, u) = p^0 \sum_{i=1}^m u_i^2 + \langle p, F(x, u) \rangle,$$

où $z = (x, p) \in T^*\mathbb{R}^n$ et $p^0 \leq 0$. Si $p^0 < 0$ on peut, par homogénéité, effectuer la normalisation $p^0 = -1/2$. Puisque le domaine du contrôle n'est pas borné, la condition de maximisation s'écrit $\partial H / \partial u = 0$, de laquelle on déduit l'expression du contrôle extrémal

$$u_i = H_i(z) = \langle p, F_i(q) \rangle, \quad i = 1, 2.$$

En substituant dans l'expression de H , on obtient le Hamiltonien vrai

$$H_r(z) = H_0(z) + \frac{1}{2} \sum H_i^2(z).$$

La suite de ce chapitre est dédiée à la présentation des méthodes de calcul numérique en contrôle optimal que nous avons employées au cours de nos travaux.

2.6 Méthode de tir simple

La méthode de tir simple est une méthode numérique dite *indirecte* qui permet de résoudre un problème aux valeurs limites issu de l'application du principe du maximum, voir [14]. Ce dernier implique que les solutions d'un problème de contrôle optimal du type de celui défini par le système contrôlé 2.1 et le coût 2.2, dont on suppose dans un premier temps que le temps final t_f est fixé, sont les projections d'extrémales $(q(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$. Il s'agit alors d'utiliser la condition de maximisation, et au besoin certaines hypothèses telles que par exemple la condition stricte de Legendre, pour exprimer localement les contrôles extrémaux sous la forme de fonctions lisses $u_r(t) = u_r(q(t), p(t))$, le système extrémal se réécrivant alors

$$\dot{z}(t) = \overrightarrow{H}_r(z(t))$$

où $z = (q, p)$. En exprimant les conditions initiales, finales et les conditions éventuelles de transversalité sous la forme $R(z(0), z(t_f)) = 0$, le problème aux valeurs limites que l'on doit résoudre devient

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \overrightarrow{H}_r(z(t)) \\ R(z(0), z(t_f)) &= 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Supposons avoir fixé une condition initiale q_0 . Nous sommes conduits à la définition suivante.

Définition 2.6.1. On appelle *fonction de tir* l'application E définie par

$$E : p_0 \longrightarrow R(z_0, z(t_f)).$$

La résolution du problème aux deux bouts est donc équivalente à la détermination d'un zéro de la fonction de tir E . On parle alors de résoudre *l'équation de tir*. Puisque $u_r(q, p)$ est lisse, la fonction de tir E l'est également. Le zéro cherché peut donc être obtenu via la méthode de Newton, si tant est qu'on dispose d'une approximation assez précise de l'état adjoint initial p_0 . Remarquons que si le temps t_f n'est pas fixé mais libre, il suffit de considérer t_f comme une inconnue supplémentaire pour se ramener à un problème semblable de recherche de zéro d'une fonction de tir. On incorpore alors la condition finale de nullité du Hamiltonien vrai $H_r(z(t_f)) = 0$, déduite de l'égalité 2.6, à l'équation $R(z(0), z(t_f)) = 0$ pour obtenir un problème bien posé.

Le problème de l'approximation de p_0 est une des principales difficultés à surmonter pour espérer faire converger la méthode de tir. Une importante partie de notre travail a consisté à déterminer de précises initialisations de cette méthode, permettant ainsi de calculer les trajectoires à temps minimal et énergie minimale dans les contextes des problèmes des trois corps plan et spatial. Pour ce faire, nous avons notamment utilisé différentes méthodes de continuation numérique, dont nous expliquons le principe général dans la section suivante.

2.7 Méthode de continuation

La méthode de continuation repose sur l'idée de considérer le Hamiltonien vrai H_r associé au problème de contrôle optimal auquel on s'intéresse, comme

l'élément H_1 d'une famille de Hamiltoniens lisses $(H_\lambda)_{\lambda \in [0,1]}$ dont l'élément H_0 induit une équation de tir facile à résoudre. La construction d'une telle famille est conditionnée par la pertinence du choix du paramètre λ . Celui-ci doit être un paramètre naturel du problème dont le choix est guidé par une bonne connaissance de la physique du problème. On en déduit un algorithme homotopique permettant de calculer une solution de l'équation de tir correspondante à H_r . Son schéma est le suivant :

1. On détermine le point de départ p_0^0 associé à $\lambda = 0$ de la méthode de continuation. On peut ainsi calculer une extrémale de référence $z^0(t)$ sur $[t_0, t_f]$ partant de (q_0, p_0) et satisfaisant les conditions limites.
2. On construit le chemin des λ . On adopte une discrétisation judicieusement choisie $0 = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N = 1$ telle que l'équation de tir est résolue itérativement en λ_{i+1} depuis λ_i . On remarque que l'utilisation de la méthode de Newton implique de générer au cours de l'algorithme la différentielle de chaque fonction de tir $E_i, i = 0, 1, \dots, N$.
3. On construit ainsi une suite p_0^0, \dots, p_0^N de solutions des équations de tir associées aux fonctions E_0, \dots, E_N . La condition initiale p_0^N est celle qui était recherchée.

La validité de cette méthode est garantie par le théorème suivant, voir [62].

Théorème 2.7.1. *Soit B la boule unité de \mathbb{R}^n et soit $F : B \rightarrow B$ une application de classe \mathcal{C}^2 . Pour $a \in B$ et $\lambda \in [0, 1]$, on pose*

$$\rho_a(\lambda, x) = \lambda(x - F(x)) + (1 - \lambda)(x - a).$$

Supposons que pour chaque point fixe de F , la matrice Jacobienne de l'application $x \rightarrow x - F(x)$ soit non singulière. Alors, pour presque tout point appartenant à l'intérieur de B , l'ensemble des zéros de ρ_a consiste en un nombre fini de courbes \mathcal{C}^1 , disjointes et de longueur finie, voir la figure 2.1, de la forme :

1. *une courbe fermée de $[0, 1] \times B$;*
2. *un arc d'extrémités appartenant à $\{1\} \times B$;*
3. *une courbe joignant $(0, a)$ à $(1, \bar{x})$, où \bar{x} est un point fixe de F .*

L'algorithme consiste donc à suivre la courbe de zéros d'une fonction de la forme ρ_a en appliquant la méthode de Newton.

Mentionnons un résultat complémentaire fournissant une condition nécessaire et suffisante pour que les solutions des équations de tir associées à la famille de Hamiltoniens $(H_\lambda)_{\lambda \in [0,1]}$ se présentent sous forme de courbes lisses. Sans perte de généralité, et par souci de simplicité, on peut supposer que le temps final t_f est fixé et que la condition finale s'écrit $q_f = q_1$, le théorème énoncé par la suite s'adaptant parfaitement aux autres cas. La famille paramétrée $(E_\lambda)_{\lambda \in [0,1]}$ des fonctions de tir est alors définie par

$$E_\lambda(p_0) = \exp_{q_0, t_f}^\lambda(p_0) - x_1, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Une simple application du théorème des fonctions implicites fournit alors le résultat suivant.

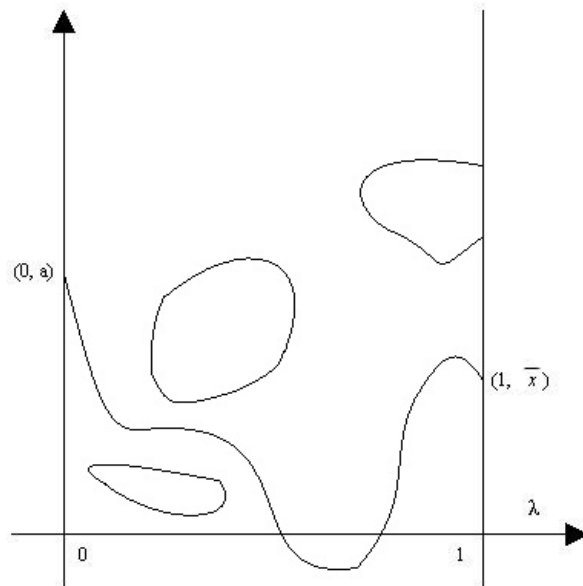


FIGURE 2.1 – Courbes de zéros types de la fonction ρ_a

Théorème 2.7.2. *Pour tout λ l'application $\exp_{q_0}^\lambda$ est de rang maximal si et seulement si le point $q_1 = \exp_{q_0}^\lambda(p(0), t_f^\lambda)$ n'est pas conjugué à q_0 . De plus les solutions des équations de tir forment dans ce cas une courbe lisse, qui peut être paramétrée par λ et la différentielle E'_λ peut être calculée en intégrant l'équation de Jacobi.*

Ce théorème n'assure cependant pas à lui seul la convergence de la méthode de continuation. En effet, rien n'indique nécessairement que le chemin des zéros des fonctions de tir est paramétré sur tout l'intervalle $[0,1]$. Des conditions géométriques supplémentaires, doivent être vérifiées pour assurer cette convergence. Pour plus de détails, on pourra se reporter à [17, 32].

2.8 Implémentation Numérique

La plupart des outils numériques que nous avons utilisés sont implémentés dans le code Cotcot (Conditions of Order Two, COnjugate Times) dont l'utilité est de fournir les outils numériques suivants :

- intégrer le champ de vecteurs hamiltonien lisse \vec{H}_r ,
- résoudre l'équation de tir associée,
- calculer les champs de Jacobi correspondants le long des extrémals,
- évaluer les points conjugués.

Le code est écrit en langage Fortran, dans lequel une différentiation automatique est utilisée pour générer le système hamiltonien et son équation variationnelle. Le langage employé par l'utilisateur est Matlab. On pourra se référer

à [6] pour une description précise du code qui s'appuie sur des algorithmes d'intégration d'équations différentielles ordinaires et de résolution de la méthode de Newton. Le test des points conjugués consiste à vérifier une condition de rang qui se base sur l'évaluation des zéros d'un déterminant ou une SVD (Singular Value Decomposition). La méthode de continuation a été implémentée parallèlement en tant que simple discrétisation du chemin de l'homotopie où la méthode de Newton est employée à chaque pas. Une alternative à cette implémentation peut consister en une continuation numérique du chemin, utilisant les équations différentielles ordinaires implicites, où la méthode de Newton est utilisée au premier pas pour initialiser la continuation et au dernier pas pour résoudre la fonction de tir finale avec une précision arbitraire.

Le chapitre suivant propose un résumé de l'ensemble des travaux effectués au cours de cette thèse, lesquels sont détaillés dans les trois articles figurant dans ce manuscrit. On y décrit l'application des méthodes géométriques et numériques de contrôle optimal présentées précédemment au problème de calcul de trajectoires à poussée faible dans le modèle des trois corps restreint. L'enjeu de nos recherches a principalement consisté en la détermination d'initialisations efficaces des méthodes de tir utilisées pour générer numériquement un large ensemble de trajectoires temps-minimales et énergie-minimales dans le système Terre-Lune.

Chapitre 3

Contribution scientifique

3.1 Transferts Terre-Lune à temps minimal et énergie minimale

La première contribution de ce travail de thèse a été de calculer numériquement des transferts Terre-Lune à poussée faible dans le problème restreint des 3 corps plan. De telles trajectoires sont solutions du système 1.26, lequel, en posant $q = (q_1, q_2, q_3, q_4) = (x, y, \dot{x}, \dot{y})$, peut être réécrit sous la forme du système contrôlé bi-entrée

$$\dot{q} = F_0(q) + F_1(q)u_1 + F_2(q)u_2, \quad (3.1)$$

où F_0 , F_1 et F_2 sont les champs de vecteurs lisses de \mathbb{R}^4 donnés par

$$F_0(q) = \begin{pmatrix} q_3 \\ q_4 \\ 2q_4 + q_1 - (1 - \mu) \frac{q_1 + \mu}{((q_1 + \mu)^2 + q_2^2)^{\frac{3}{2}}} - \mu \frac{q_1 - 1 + \mu}{((q_1 - 1 + \mu)^2 + q_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -2q_3 + q_2 - (1 - \mu) \frac{q_2}{((q_1 + \mu)^2 + q_2^2)^{\frac{3}{2}}} - \mu \frac{q_2}{((q_1 - 1 + \mu)^2 + q_2^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix},$$
$$F_1(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_2(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les conditions initiales et finales des transferts doivent respectivement caractériser des orbites terrestres et lunaires. Par commodité, nous avons fixé l'orbite géostationnaire comme orbite initiale et l'orbite circulaire centrée sur la Lune comme orbite cible. Nous avons alors déterminé des transferts à poussée faible en considérant les problèmes de minimisation du coût énergétique d'une trajectoire

$$\min_{u(\cdot) \in \mathbb{R}^2} \int_{t_0}^{t_f} u_1^2 + u_2^2 dt,$$

lorsque le temps de transfert t_f est fixé, et de minimisation du temps de transfert

$$\min_{u(\cdot) \in B_{\mathbb{R}^2}(0, \epsilon)} \int_{t_0}^{t_f} dt$$

où la borne ϵ imposée sur la norme du contrôle est choisie suffisamment petite. La masse réduite μ dans le système Terre-Lune est égale $1.2153e - 2$. En référence aux données pratiques de la mission spatiale Smart-1 [57, 58], nous avons considéré un satellite de 350 kg et fixé le seuil de poussée faible à $7.3e - 2N$. Nos résultats sont présentés en détails dans les articles *Geometric and numerical techniques in optimal orbital transfer using low propulsion* [10], en complément de travaux géométriques de Bernard Bonnard et Jean-Baptiste Caillaud sur le problème de minimisation énergétique et *Shooting and numerical continuation methods for computing time-minimal and energy-minimal trajectories in the Earth-Moon system using low propulsion* [51]. La méthode générale que nous avons employée pour calculer les différentes trajectoires optimales peut être résumée de la manière suivante. En vertu du principe du maximum général de Pontryagin, les trajectoires optimales sont nécessairement des courbes extrémales solutions d'un certain système hamiltonien sur le fibré cotangent de l'espace des phases. En intégrant numériquement ce système hamiltonien, on peut calculer les trajectoires extrémales dépendant de conditions initiales données. En fixant une condition initiale dans l'espace des phases, l'objectif est de déterminer les vecteurs adjoints initiaux tels que les extrémales correspondantes satisfassent à la fois des conditions finales imposées, en l'occurrence appartiennent à l'orbite circulaire autour de la Lune, et les conditions de transversalité du principe du maximum. On utilise pour cela la méthode de tir simple basée sur l'algorithme de Newton, qui requiert pour être efficace une initialisation précise. Cette initialisation est une étape délicate lorsqu'il s'agit de calculer des transferts à propulsion faible. En effet, plus le contrôle qu'on opère sur la dynamique est petit, plus le temps de transfert est long et l'intégration numérique imprécise, ce qui complique la convergence de l'algorithme de Newton. Pour pallier à cette difficulté, on utilise une méthode de continuation qui permet de résoudre la question de l'initialisation grâce à un algorithme homotopique. On pratique ainsi une continuation sur la poussée maximale autorisée dans le cas de la minimisation du temps de transfert. A poussée forte, le temps de transfert de la Terre à la Lune est court ce qui facilite l'initialisation et fournit un point de départ à la méthode d'homotopie. Pour le problème de minimisation de l'énergie, on utilise une continuation sur la masse réduite μ de manière à relier le problème intégrable des 2 corps et celui des 3 corps restreint. Dans les deux cas, on calcule tout d'abord des extrémales joignant l'orbite terrestre et le point L_1 . On simplifie ainsi les conditions finales imposées, de sorte que la convergence de l'algorithme de Newton soit favorisée. En outre, on fournit une collection d'orbites pouvant être comparées aux premières parties des trajectoires Terre-Lune afin d'évaluer le rôle du voisinage de L_1 dans la minimisation des deux coûts, voir les figures 3.1 et 3.2. Mentionnons également les calculs d'extrémales Terre- L_4 à temps minimal, qui ont été menés pour juger des similitudes topologiques entre les orbites reliant le domaine intérieur et différents points d'équilibre. L'optimalité locale des trajectoires extrémales générées numériquement est déduite des conditions suffisantes du second ordre. La vérification de ces conditions est en outre nécessaire pour la bonne convergence des méthodes de continuation. Nous proposons enfin une vérification numérique du théorème 2.4.2, en comparant les temps t_c^1 et t_{cc}^1 d'une extrémale anormale temps-minimale entre la Terre et le point L_1 .

La pertinence de nos résultats est en partie estimée en comparant les caracté-

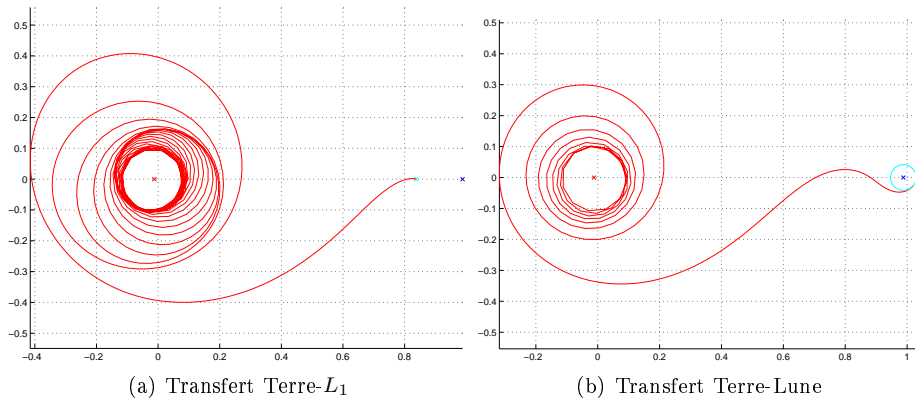


FIGURE 3.1 – Comparaison des trajectoires temps-minimales Terre- L_1 et Terre-Lune dans le système de coordonnées en rotation.

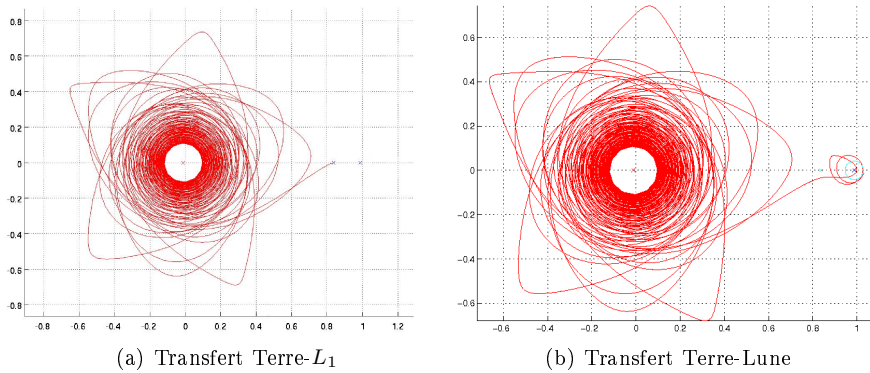


FIGURE 3.2 – Comparaison des trajectoires énergie-minimales Terre- L_1 et Terre-Lune dans le système de coordonnées en rotation.

téristiques des transferts calculés avec celles de la mission Smart-1. En effet, au delà de l'efficacité des méthodes d'initialisation des algorithmes de tir que nous avons employées, on observe une réduction significative de la poussée maximale autorisée et du temps de transfert Terre-Lune correspondant à une propulsion faible.

Nous proposons également une technique de recollement de trajectoires fournissant une approximation du transfert Terre-Lune à énergie minimale obtenu au moyen de notre méthode de tir. Le principe de cette méthode repose sur la décomposition de la trajectoire Terre-Lune en trois phases distinctes. Dans la première le satellite est soumis à l'influence prépondérante de la Terre et son mouvement s'apparente à un transfert entre deux orbites keplériennes. Nous utilisons alors la technique de moyennation, expliquée avec précision dans *Geometric and numerical techniques in optimal orbital transfer using low propulsion* [10], pour le représenter. La deuxième phase correspond à la traversée du voisi-

nage du point L_1 pendant laquelle le satellite transite entre les zones d'attraction terrestre et lunaire. La trajectoire peut alors être considérée comme une solution des équations linéarisées du problème plan contrôlé au voisinage de L_1 . Au cours de la troisième, le satellite rejoint l'orbite circulaire autour de la Lune. Sa dynamique peut donc une nouvelle fois être décrite comme une trajectoire du problème des deux corps, approximée par moyennation. Une explication détaillée de cette méthode et les résultats qui en découlent sont présentés dans la note *Trajectoires Terre-Lune à énergie minimale et technique de recollement* qui figure également dans ce manuscrit.

Il n'a pas été surprenant de constater le rôle important joué par le point d'équilibre L_1 du système Terre-Lune pour le calcul de trajectoires temps-minimales et énergie-minimales. En effet, les transferts que nous avons exhibés empruntent tous le voisinage de L_1 , illustrant son rôle de passerelle de l'influence terrestre vers l'influence lunaire. Ses observations suggèrent l'implication de la structure de variétés invariantes, non plus seulement pour la conception de trajectoires à faible coût en énergie mais pour le calcul de transferts optimaux dans le système Terre-Lune. Cette considération nous a conduit à nous intéresser au problème de transfert à énergie minimale restreint au voisinage de L_1 . Pour cette étude nous avons préféré considérer le problème restreint des 3 corps spatial, plus précis et réaliste que le problème plan.

3.2 Transferts à énergie minimale au voisinage du point L_1

Comme cela a déjà été abordé en section 1.3.3, notre étude a porté sur le problème de la minimisation du coût énergétique

$$\int_{t_0}^{t_f} u_1(t)^2 + u_2(t)^2 + u_3(t)^2 dt. \quad (3.2)$$

le long de trajectoires du système 1.48 reliant la branche positive de l'approximation linéaire $W_+^s(S_h^3)$ de la variété stable et la branche positive de l'approximation linéaire $W_+^u(S_h^3)$ de la variété instable où h a été choisi supérieur à ϵ_1 de manière à ce que le mouvement libre entre les domaines intérieur et lunaire soit possible. Ce choix est justifié par 2 raisons. La première est que les approximations linéaires des variétés invariantes sont précises dans un voisinage raisonnable de L_1 , en vertu de ce qui a été exposé au cours de la section 1.3.2. Elles fournissent donc des conditions initiales et finales pertinentes pour étudier l'impact de la structure de variétés invariantes sur le calcul de trajectoires énergie-minimales entre les zones d'attraction terrestre et lunaire. De plus, afin de calculer des portions de transferts Terre-Lune, il est nécessaire de choisir des conditions initiales appartenant à la branche de la variété stable en provenance du domaine d'influence terrestre. Rappelons que le changement de coordonnées symplectique A défini en section 1.3.2 fournit la relation entre l'abscisse x du système de coordonnées centré en L_1 et les coordonnées de la région d'équilibre

\mathcal{R}

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2\lambda_1}{s_1}q_1(t) - \frac{2\lambda_1}{s_1}p_1(t) + \frac{2\omega_1}{s_2}p_2(t) \\ &= \frac{2\lambda_1}{s_1}q_1^0 \exp^{\lambda_1 t} - \frac{2\lambda_1}{s_1}p_1^0 \exp^{-\lambda_1 t} + \frac{2\omega_1}{s_2}(q_2^0 \cos \omega_1 t + p_2^0 \sin \omega_1 t). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Or l'abscisse x de la Terre dans le système de coordonnées centrées en L_1 est négative. On doit donc sélectionner une condition initiale p_1^0 de manière à obtenir le comportement asymptotique $x(t) \rightarrow -\infty$ quand $t \rightarrow -\infty$. La constante $\frac{2\lambda_1}{s_1}$ étant positive, on en déduit qu'il faut choisir un point appartenant à la branche positive $W_+^s(S_h^3)$ de la variété stable. En appliquant un raisonnement similaire, on montre que la branche de la variété instable dirigée vers le domaine lunaire est $W_+^u(S_h^3)$. L'article *Energy-minimal transfers in the vicinity of the Lagrangian point L_1* [52] fournit l'ensemble des développements et résultats de cette étude. Tout comme dans les travaux présentés en section 3.1, des trajectoires localement optimales entre $W_+^s(S_h^3)$ et $W_+^u(S_h^3)$ sont déterminées à l'aide de la méthode de tir simple et des conditions du second ordre. Cependant, l'initialisation de la méthode de tir ne requiert pas de méthode de continuation. En effet, on choisit comme point de départ de l'algorithme de tir la valeur initiale η_0^* de l'état adjoint associée à la solution optimale du problème de contrôle linéarisé. Les équations linéaires contrôlées

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} - (1 + c_2)x &= u_1 \\ \ddot{y} + 2\dot{x} + (c_2 - 1)y &= u_2 \\ \ddot{z} + 2c_2z &= u_3 \end{aligned} \quad (3.4)$$

sont déduites du système 1.36 et s'écrivent, en appliquant le changement de variables symplectique A , sous la forme matricielle

$$\dot{z} = Az + Bu \quad (3.5)$$

où $z = (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ et $B \in \mathcal{M}_{6,3}(\mathbb{R})$. Le calcul de η_0^* est alors basé sur les résultats fondamentaux de contrôle optimal de systèmes linéaires à coûts quadratiques rappelés en section 2.2. Dans un premier temps, le principe du maximum 2.2.2 permet de décrire la trajectoire optimale z^* et l'état adjoint correspondant η^* que nous recherchons comme solutions du système différentiel

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + BB^T \eta^T \\ \dot{\eta} &= -\eta A. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Puisque dans le problème que nous considérons la cible cylindrique $W_+^u(S_h^3)$, la condition de transversalité $\eta^*(t_f)$ est intérieur et normal à G en $z^*(t_f)$ s'écrit

$$\eta^{*T}(t_f) = -z^{*T}(t_f)Q \quad (3.7)$$

où la matrice $Q \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ est de la forme

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & k\omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k\omega_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k\omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k\omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et la constante k est strictement positive. On montre, en s'inspirant directement de la preuve du théorème 2.2.3, voir [61], que pour tout $t \in [t_0, t_f]$ on a

$$\eta^*(t) = z^{*T}(t)E(t)$$

où E est solution de l'équation

$$\begin{aligned} \dot{E} &= -A^T E - EA - E B b^T E \\ E(t_f) &= -Q. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Une intégration numérique rétrograde permet ainsi d'initialiser efficacement la méthode de tir. En calculant des transferts entre des sections circulaires des variétés stables et instables de plus en plus éloignées du point L_1 , nous mettons alors en évidence le rôle essentiel de la structure de variétés invariantes pour le calcul de trajectoires énergie-minimales entre les domaines intérieur et lunaire, voir la figure 3.3. En effet, les projections sur le plan (p_1, q_1) de cette collection de transferts, lors desquels les poussées maximales exercées ont été numériquement estimées entre $4e - 1$ et $1e - 1$ Newtons, relèvent des dynamiques contrôlées topologiquement comparables à la dynamique des orbites de transit.

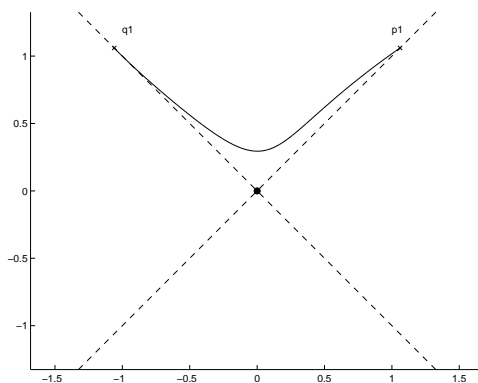


FIGURE 3.3 – Projection sur le plan (q_1, p_1) d'une trajectoire localement énergie-minimale entre les branches $W_+^s(S_h^3)$ de la variété stable et $W_+^u(S_h^3)$ de la variété instable au voisinage du point L_1 . (les axes sont tournés de 45°).

Geometric and numerical techniques in optimal control of two and three-body problems

B. Bonnard,* J.-B. Caillau† and G. Picot‡

Dedicated to John Baillieul on the occasion of his 65th birthday

Abstract. The objective of this article is to present geometric and numerical techniques developed to study the orbit transfer between Keplerian elliptic orbits in the two-body problem or between quasi-Keplerian orbits in the Earth-Moon transfer when low propulsion is used. We concentrate our study on the energy minimization problem. From Pontryagin's maximum principle, the optimal solution can be found solving the shooting equation for smooth Hamiltonian dynamics. A first step in the analysis is to find in the Kepler case an analytical solution for the averaged Hamiltonian, which corresponds to a Riemannian metric. This will allow to compute the solution for the original Kepler problem, using a numerical continuation method where the smoothness of the path is related to the conjugate point condition. Similarly, the solution of the Earth-Moon transfer is computed using geometric and numerical continuation techniques.

1 Introduction

In this article we consider the orbit transfer in the two and three-body problem, using low propulsion. In the first case, the model is given by Kepler equation

$$\ddot{q} = -\frac{q}{|q|^3} + \frac{u}{m}$$

where m represents the mass of the satellite, subject to

$$\dot{m} = -\delta|u|$$

modelling fuel consumption. The control satisfies the constraint $|u| \leq \varepsilon$ where ε is a small parameter.

The physical optimal control has to maximize the final mass which leads to

$$\min_{u(\cdot)} \int_0^{t_f} |u| dt$$

*Mathematics Institute, Bourgogne University & CNRS, 9 avenue Savary, F-21078 Dijon (bernard.bonnard@u-bourgogne.fr).

†Same address (jean-baptiste.caillau@u-bourgogne.fr), supported by Conseil Régional de Bourgogne (contract no. 2009-160E-160-CE-160T).

‡Same address (gautier.picot@u-bourgogne.fr), supported by CNRS (contract no. 37244) and Conseil Régional de Bourgogne (contract no. 079201PP02454515).

where t_f is the fixed transfer time. From Pontryagin maximum principle [28], fixing the boundary conditions—*e.g.* a transfer from a low eccentric to a geostationary orbit—, an optimal solution can be numerically computed using a shooting algorithm. This leads to a complicated numerical problem. In [20], the following numerical scheme is proposed. One computes the optimal solution using the convex homotopy

$$\min_{u(\cdot)} \int_0^{t_f} [\lambda|u|^2 + (1 - \lambda)|u|] dt, \quad \lambda \in [0, 1],$$

which amounts to regularizing the L^1 -minimization problem into an L^2 -problem. This was the starting point of the use of continuation methods in orbital transfer, when low propulsion is applied—see also [14] for the use of the continuation method in the time minimal control problem, where the homotopy parameter is the bound of the maximal amplitude of the thrust. From the mathematical point of view, the original dynamics associated with the optimal flow is replaced by another Hamiltonian one, and a continuation is made to solve the shooting equation.

The first motivation of this article is to present a neat geometric result from [8]: Neglecting the mass variation, restricting to coplanar transfer (the inclination being considered as a homotopy parameter) and replacing the L^1 -problem by an averaged L^2 -problem, one can substitute the Hamiltonian vector field defined by the maximum principle with

$$H = \frac{1}{2n^{5/3}} \left[9n^2 p_n^2 + \frac{5}{2}(1 - e^2)p_e^2 + \frac{5 - 4e^2}{2} \frac{p_\theta^2}{e^2} \right],$$

where n is the mean motion, e the eccentricity, and θ the angle of the pericenter (the singularity $e = 0$ corresponds to circular orbits). Coordinates (n, e, θ) are moreover orthogonal coordinates for the Riemannian metric associated with H ,

$$g = \frac{dn^2}{9n^{1/3}} + \frac{2n^{5/3}}{5(1 - e^2)} de^2 + \frac{2n^{5/3}}{5 - 4e^2} d\theta^2.$$

Such a metric is isometric to

$$g = dr^2 + \frac{r^2}{c^2} (d\varphi^2 + G(\varphi)d\theta^2)$$

where

$$r = \frac{2}{5} n^{5/6}, \quad \varphi = \arcsin e$$

and

$$c = \sqrt{2/5}, \quad G(\varphi) = \frac{5 \sin^2(\varphi)}{1 + 4 \cos^2(\varphi)}.$$

The Hamiltonian flow \vec{H} is Liouville integrable and the metric in the above normal form captures the main properties of the averaged orbital transfer. Indeed, one can extract from g the following two-dimensional Riemannian metrics:

- $g_1 = dr^2 + r^2 d\psi^2$ which is associated with the orbital transfer where θ is kept fixed (this encompasses the case of circular targets). Such a metric is flat and geodesics are straight lines in suitable coordinates.

– $g_2 = d\varphi^2 + G(\varphi)d\theta^2$ which represents the restriction of the metric to $r^2 = c^2$ and describes by homogeneity the orbit transfer in the general case.

A generalization of the results of [31] will allow to compute for the metric g_2 the conjugate and cut loci and to get a global optimality solution for the averaged optimal control problem. This is the starting point to analyze the original optimal control problem using a continuation method.

A second motivation of this article is to present some results from geometric control theory connected to our analysis with adapted numerical codes developed to compute the solutions. First of all, the maximum principle is only a necessary optimality condition. In order to get sufficient optimality conditions under generic assumptions one must define the concept of conjugate point, associated with the energy minimization problem. This concept was already introduced in the standard literature of calculus of variations [5]. If the Hamiltonian optimal dynamics is described by a smooth Hamiltonian vector field \vec{H} , conjugate points are the image of the singularities of the exponential mapping: $\exp_{x(0)} : p(0) \rightarrow \Pi_x \exp t_f \vec{H}(x(0), p(0))$ where $\Pi_x : (x, p) \rightarrow x$ is the canonical projection. Such points can be numerically computed using the code [12]. An important remark, in view of the use of the (smooth) continuation method in optimal control is to observe that the shooting equation is precisely to find $p(0)$ such that $\exp_{x(0)}(p(0)) = x_1$ where x_1 is the terminal condition and the derivative is generated using the variational equation of \vec{H} . This will lead to convergence results for the smooth continuation method in optimal control, related to estimates of conjugate points.

The last section is devoted to the Earth-Moon transfer, using low propulsion. The model is the standard circular restricted model [25] where the two primaries are fixed in a rotating frame. Up to a normalization the system can be written in Hamiltonian form,

$$\dot{x} = \vec{H}_0(x) + u_1 \vec{H}_1(x) + u_2 \vec{H}_2(x)$$

where $x = (q, p) \in \mathbf{R}^4$ and the drift \vec{H}_0 is given by

$$H_0(x) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + p_1 q_2 - p_2 q_1 - \frac{1-\mu}{\rho_1} - \frac{\mu}{\rho_2},$$

q being the position of the spacecraft, ρ_1 representing the distance to the Earth with mass $1-\mu$ located at $(-\mu, 0)$, and ρ_2 the distance to the Moon with mass μ located at $(1-\mu, 0)$, $\mu \simeq 1.2153e-2$ being a small parameter. The Hamiltonian fields associated with the control are given by

$$H_i(x) = -q_i, \quad i = 1, 2,$$

and the control bound is $|u| \leq \varepsilon$. The parameter μ is small and this remark was used by Poincaré to study the dynamics of the free motion described by \vec{H}_0 by making a deformation of the case $\mu = 0$ which corresponds to Kepler equation in rotating coordinates [25]. Inspired by this approach and using our preliminary geometric analysis, we propose a simple solution to the Earth-Moon transfer using low propulsion for the energy minimization problem.

2 Geometric and numerical methods

2.1 Maximum principle

We consider the energy minimization problem $\min_{u(\cdot)} \int_0^{t_f} |u|^2 dt$, for a smooth control system of the form

$$\dot{x} = F_0(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) F_i(x(t)) = F(x(t), u(t)), \quad x \in X.$$

The set of admissible controls is the subset \mathcal{U} of measurable bounded mappings $u(\cdot)$ with corresponding trajectory $x(\cdot)$ defined on the whole interval $[0, t_f]$. Pontryagin maximum principle [28] tells us that

Proposition 2.1. *If (x, u) is an optimal pair on $[0, t_f]$, there exists a non trivial pair (p^0, p) , $p^0 \leq 0$ and p an absolutely continuous adjoint vector valued in T^*X , such that on $[0, t_f]$ we have*

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x, p, u), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p, u), \quad (1)$$

and

$$H(x, p, u) = \max_{v \in \mathbf{R}^m} H(x, p, v) \quad (2)$$

where $H(x, p, u) = p^0 \sum_{i=1}^m u_i^2 + \langle p, F(x, u) \rangle$.

Definition 2.1. The mapping H from $T^*X \times \mathbf{R}^m$ to \mathbf{R} is called the *pseudo-Hamiltonian*. A triple (x, p, u) solution of (1-2) is called an *extremal trajectory*.

2.2 Computation of extremals

From the maximization condition (4), one deduces that $\partial H / \partial v = 0$, and there are two types of extremals:

- *Abnormal extremals.* They correspond to the situation $p^0 = 0$ and are implicitly defined by the relations $H_i = 0$, $i = 1, \dots, m$, where $H_i = \langle p, F_i(x) \rangle$ are the Hamiltonian lifts.
- *Normal extremals.* If $p^0 < 0$, it can be normalized to $-1/2$ by homogeneity. From $\partial H / \partial v = 0$, one deduces $u_i = H_i$ for $i = 1, \dots, m$, and plugging such H_i into H defines a true smooth Hamiltonian

$$H_n = H_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m H_i^2$$

whose solutions are the *normal extremals*.

2.3 The concept of conjugate point

Definition 2.2. Let $z = (x, p)$ be a normal reference extremal defined on $[0, t_f]$. The variational equation

$$\dot{\delta z}(t) = d\overrightarrow{H}_n(z(t))\delta z(t)$$

is called the *Jacobi equation*. A *Jacobi field* is a non-trivial solution $\delta z = (\delta x, \delta p)$. It is said to be *vertical* at time t if $\delta x(t) = d\Pi_x(z(t))\delta z(t) = 0$ where Π_x is the projection $(x, p) \mapsto x$.

The following standard geometric result is crucial.

Proposition 2.2. *Let L_0 be the fiber $T_{x_0}^*X$ and $L_t = \exp_t(\overrightarrow{H_n})(L_0)$ be its image by the one-parameter subgroup generated by $\overrightarrow{H_n}$. Then L_t is a Lagrangian submanifold whose tangent space at $z(t)$ is generated by the Jacobi fields which are vertical at $t = 0$.*

Definition 2.3. We fix $x_0 = x(0)$ and define for $t \in [0, t_f]$ the *exponential mapping*

$$\exp_{x_0, t}(p_0) = \Pi_x(z(t, z_0))$$

where $z(t, z_0)$, with $z_0 = (x_0, p_0)$, denotes the normal extremal departing from z_0 when $t = 0$.

Definition 2.4. Let $z = (x, p)$ be the reference normal extremal. The time $t_c \in [0, t_f]$ is called *conjugate* if the mapping \exp_{x_0, t_c} is not an immersion at $p(0)$. The associated point $x(t_c)$ is said to be conjugate to x_0 . We denote by $t_{1,c}$ the first conjugate point and by $C(x_0)$ the *conjugate locus* formed by the set of first conjugate points occurring at time t_f when we consider all normal extremals starting from x_0 .

The conjugate time notion admits the following generalization.

Definition 2.5. Let M_1 be a regular submanifold of M , and let us define $M_1^\perp = \{(x, p) \in T^*M \mid x \in M_1, p \perp T_x M_1\}$. Then $t_{\text{foc}} \in [0, t_f]$ is called a *focal time* if there exists a Jacobi field $J = (\delta x, \delta p)$ such that $\delta x(0) = 0$ and $J(t_{\text{foc}})$ is tangent to M_1^\perp .

Remark 2.1. The concept of conjugate point is related to the necessary and sufficient optimality conditions, under generic assumptions, see for instance [12].

2.4 Conjugate points and smooth continuation method

Smooth continuation is a general numerical method to solve a system of equations $F(x) = 0$ where $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ is a smooth mapping, see [1]. The principle is to construct a homotopy path $h(x, \lambda)$ such that $h(x, 0) = G(x)$ and $h(x, 1) = F(x)$ where $G(x)$ is a map having known zeros, or where the zeros can be easily computed using a Newton type algorithm. The zeros along the path can be calculated by different methods, the simplest being a discretization $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = 1$ of the homotopy parameter where, at step $i+1$, the zero computed at step i is used to initialize Newton algorithm. The approach has to be adapted to optimal control problems: The shooting equation comes from the projection of a symplectic mapping, the Jacobian can be computed using Jacobi fields and one must consider the *central extremal fields* associated with the problem (see [13]). A short description of the method is given below in our case study.

2.4.1 Shooting equation

We consider a family H_λ , $\lambda \in [0, 1]$, of smooth Hamiltonians on T^*X associated with normal extremals of an energy minimization problem. We fix the boundary conditions x_0, x_1 and the transfer time t_f . This leads to a family $\exp_{x_0, t_f}^\lambda(p_0)$ of exponential mappings. Using the notation $E^\lambda : p_0 \rightarrow \exp_{x_0, t_f}^\lambda(p_0)$, one must solve the shooting equation $E^\lambda(p_0) = x_1$.

Proposition 2.3. *For each λ , the shooting equation is of maximal rank if and only if the point x_1 is not conjugate to x_0 for the corresponding λ . Moreover, in this case, the solutions of the shooting equation contain a smooth branch, which can be parameterized by λ and the derivative E'^λ can be generated integrating the Jacobi equation.*

From the above proposition, to ensure convergence of the method one must control

- the distance to the conjugate loci,
- that the branch has is defined on the whole interval $[0, 1]$.

The second point is related to two standard problems in optimal control: Existence of Lipschitzian minimizers—hence solutions of the maximum principle [22]—, and compactness of the domain of the exponential mapping. Next we present a nice geometric situation for which convergence of the method is ensured.

Definition 2.6. Consider the normal extremal field \overrightarrow{H}_n of an energy minimization problem with fixed final time t_f . Given an initial condition x_0 , the *separating locus* $L(x_0)$ is the set of points where two distinct normal extremal curves intersect with same cost. The *cut point* along a normal extremal is the first point where it ceases to be optimal. The *cut locus* $\text{Cut}(x_0)$ is the set of such points when we consider all extremals initiating from x_0 and losing optimality exactly at time t_f .

2.4.2 Convergence of the continuation method in the Riemannian case

We first recall that the Riemannian problem can be, at least locally, reset in the following framework.

Let F_1, \dots, F_n be a set of smooth vector fields on a manifold X and assume that they are linearly independent. One can define a Riemannian metric on X by asserting that $\{F_1, \dots, F_n\}$ form an orthonormal frame. Introducing the control system $dx(t)/dt = \sum_{i=1}^n u_i(t)F_i(x(t))$, the length of the curve $x(\cdot)$ is $l(x) = \int_0^T \sum_{i=1}^n (u_i^2(t))^{1/2} dt$. From Maupertuis principle, minimizing length is equivalent to minimizing the energy $\int_0^T \sum_{i=1}^n u_i^2(t) dt$. There exists only normal extremals and H_n is given by $(1/2) \sum_{i=1}^n H_i^2$. Fixing the level set $H_n = 1/2$ parameterizes trajectories by arc length. For the energy minimization problem, the transfer time can be arbitrarily prescribed.

Theorem 2.1. *Let g_λ , $\lambda \in [0, 1]$, be a smooth family of complete Riemannian metrics on X . Let us fix the initial point x_0 . Denote $i_\lambda(x_0)$ the distance from x_0 to the cut locus $\text{Cut}^\lambda(x_0)$ and by $i_\lambda = \inf_{x_0} i_\lambda(x_0)$ the injectivity radius of the corresponding metric. Then,*

- for length shorter than $\inf_{\lambda} i_{\lambda}(x_0)$, the continuation method with initial condition of the shooting equation at x_0 converges,
- for length shorter than $\inf_{\lambda} i_{\lambda}$ the continuation method converges for every initial condition of the shooting equation.

Remark 2.2. In the Riemannian case, the situation is neat. Completeness leads to existence of smooth normal minimizers, the domain of the exponential mapping is a sphere, and estimates of the injectivity radius are related to the curvature tensor. In general, such estimates are a difficult problem and a pragmatic point of view is to have numerical approximations [12].

3 The energy minimization problem in orbital transfer with low thrust

3.1 Preliminaries

Neglecting the mass variation and restricting to the coplanar case, the system is represented in Cartesian coordinates by

$$\ddot{q} = -\frac{q}{|q|^3} + u$$

where $q = (q_1, q_2)$ is the position and $x = (q, \dot{q}) \in \mathbf{R}^4$ is the state. We denote by $H_0(q, \dot{q}) = (1/2)\dot{q}^2 - 1/|q|$ the Hamiltonian of the free motion. We have the following first integrals:

- $C = q \wedge \dot{q}$ (momentum),
- $L = -q/|q| + \dot{q} \wedge C$ (Laplace integral).

Proposition 3.1. *The domain $\Sigma_e = \{(q, \dot{q}) \mid H < 0, C \neq 0\}$, called the elliptic domain, is filled by elliptic orbits and to each orbit (C, L) corresponds a unique (oriented) ellipse.*

To represent the space of ellipses, one introduces the following geometric coordinates:

- the *semi-major axis* of the ellipse a , related to the *semi-latus rectum* P by the relation $a = P/\sqrt{1 - e^2}$,
- the argument of the pericenter θ ,
- the *eccentricity* e , the *eccentricity vector* being $(e_x, e_y) = (e \cos \theta, e \sin \theta)$.

To represent the position of the satellite we use the *longitude* $l \in \mathbf{S}^1$, while $l \in \mathbf{R}$ takes into account the rotation number and is called the *cumulated longitude*. Observe that $e = 0$ corresponds to circular orbits. The control u can be decomposed into moving frames attached to the satellite, the two standard frames being

- the *radial-orthoradial* frame $\{F_r, F_{or}\}$ where $F_r = (q/|q|) \partial/\partial \dot{q}$,
- the *tangential-normal* frame $\{F_t, F_n\}$ where $F_t = (\dot{q}/|\dot{q}|) \partial/\partial \dot{q}$.

3.2 Averaging of periodic sub-Riemannian problems

Let X be an n -dimensional smooth manifold and let $F_i(l, x), i = 1, \dots, m$ be smooth vector fields parameterized by $l \in \mathbf{S}^1$ that set up a constant rank m distribution on X (see also Remark 3.2). Given a positive pulsation ω on $\mathbf{S}^1 \times X$ relating the time t and the angle l according to

$$dl = \omega(l, x)dt, \quad (3)$$

one defines a *periodic sub-Riemannian* problem as follows: Given two points x_0 and x_f on the manifold, minimize the $L^2 dt$ control norm of trajectories connecting the two points and associated with the previous vector fields,

$$\frac{dx}{dl} = \sum_{i=1}^m u_i F_i(l, x), \quad u \in \mathbf{R}^m,$$

$$\min_{u(\cdot)} \int_0^{t_f} |u|^2 dt = \int_0^{l_f} |u|^2 \frac{dl}{\omega(l, x)} \quad (\text{here } |u|^2 = \sum_{i=1}^m |u_i|^2).$$

The total angular length, $l_f > 0$ is fixed, implicitly defining t_f through (3).

Pontryagin maximum principle asserts that minimizing trajectories are projection of Hamiltonian curves on the cotangent bundle (extremals), $z = (x, p)$, such that

$$\frac{dx}{dl} = \frac{\partial H}{\partial p}(l, x, p, u), \quad \frac{dp}{dl} = -\frac{\partial H}{\partial x}(l, x, p, u),$$

where

$$H(l, x, p, u) = p^0 |u|^2 + \sum_{i=1}^m u_i H_i(l, x, p), \quad H_i = \langle p, F_i(l, x) \rangle, \quad i = 1, \dots, m,$$

is the Hamiltonian parameterized by $l \in \mathbf{S}^1$, $u \in \mathbf{R}^m$, and a non-positive constant p^0 . We restrict the analysis to the normal case, $p^0 < 0$, and pass to affine coordinates in (p^0, p) setting $p^0 = -1/2$. Pontryagin maximization condition that, almost everywhere along an extremal,

$$H(l, z(l), u(l)) = \max_{v \in \mathbf{R}^m} H(l, z(l), v),$$

implies that the control is given by the dynamic feedback

$$u(l, z) = \omega(l, x)(H_1, \dots, H_m)(l, z), \quad (4)$$

and that z is an integral curve of the maximized Hamiltonian

$$H_n(l, z) = \frac{\omega(l, x)}{2} \sum_{i=1}^m H_i^2(l, z).$$

We are interested in the behaviour of solutions for large angular length, so we set $\varepsilon = 1/l_f$ as the small parameter and renormalize the problem in the following manner—typical of systems with two time scales.

In contrast to l which is the *fast time*, define the *slow time* $s = \varepsilon l$ in $[0, 1]$, and renormalize variables on the cotangent bundle by

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{p} = p/\varepsilon.$$

Lemma 3.1. *In the renormalized variables,*

$$\frac{d\tilde{z}}{ds} = \overrightarrow{H}_n(s/\varepsilon, \tilde{z}). \quad (5)$$

Proof. Obvious since $H_n(l, x, \cdot)$ is quadratic in the adjoint state p . \square

For fixed z , $H_n(\cdot, z)$ is a smooth function on \mathbf{S}^1 and can be expanded into its Fourier series. In particular, one can define its first coefficient or average,

$$H(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_n(l, z) dl.$$

Since taking symplectic vector field and averaging readily commute, it is well known [2, 21] that H trajectories are good approximations of those of H_n as ε goes to zero.

Theorem 3.1. *Given any initial condition, the solution \tilde{z}_ε of (5) converges uniformly on $[0, 1]$ towards the solution \bar{z} of the averaged Hamiltonian.*

Remark 3.1. The same rate of convergence holds for the cost which can be added as a new state in the augmented system. But as the integrand depends on the fast variable l through the pulsation ω , there is *a priori* no higher order approximation of the performance index [4, 16].

As for $H_n(s/\varepsilon, z)$ which converges to H in the large space of Schwartz distributions,¹ one can only expect weak convergence on the control u_ε of the original problem on $[0, 1/\varepsilon]$. We address two questions: first, can we describe the fast oscillating control by means of Fourier series with slowly varying coefficients and, secondly, what is the asymptotic behaviour of $\|u_\varepsilon\|_\infty$ when $\varepsilon \rightarrow 0$? The importance of such an estimate relies on the fact that one has in practice to estimate l_f so as to meet a given requirement on the L^∞ -norm of the control.

We first note that the average system provides a sub-Riemannian approximation of the original one.

Proposition 3.2. *The averaged Hamiltonian is a nonnegative quadratic form in the adjoint. If constant, its rank is not less than m , and H can locally be written as a sum of squares, thus defining a sub-Riemannian (Riemannian if $k = n$) problem.*

Proof. Clearly, $H(x, \cdot)$ remains quadratic nonnegative in p by linearity and positivity of the integral and

$$\ker H(x, \cdot) = \bigcap_{l \in \mathbf{S}^1} \ker H_n(l, x, \cdot)$$

so that, if constant, the rank k is at least equal to m . In this case, the quadratic form can always be decomposed into a sum of k squares in a chart by taking the square root of the associated symmetric nonnegative matrix. \square

Remark 3.2. (i) The increase in the rank is related to the generation of Lie brackets of the following system with drift: Set $\hat{x} = (l, x)$ and define

$$\hat{F}_0(\hat{x}) = \omega(\hat{x}) \frac{\partial}{\partial l}, \quad \hat{F}_i(\hat{x}) = \omega(\hat{x}) F_i(\hat{x}), \quad i = 1, \dots, m.$$

¹Topological dual of the space of smooth compactly supported functions on the real line.

The fast oscillations (with respect to l) of the control in

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \hat{F}_0(\hat{x}) + \sum_{i=1}^m u_i \hat{F}_i(\hat{x})$$

generate new directions, namely

$$(\text{ad}^j \hat{F}_0) \hat{F}_i, \quad j \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

a natural requirement being that the distribution $\{\hat{F}_0, \hat{F}_1, \dots, \hat{F}_m\}$ on the augmented space $\mathbf{S}^1 \times X$ be bracket generating. This is equivalent to the bracket condition on $\mathbf{S}^1 \times X$ for the distribution $\{\partial/\partial l, F_1, \dots, F_m\}$.

(ii) The assumption of rank constancy is sufficient to get a decomposition into a smooth sum of squares [3]. That the assumption is crucial is illustrated by the fact that it cannot be removed, even in the analytical category. Eigenvalues (and associated projectors) are indeed analytic functions on the set of matrices in the neighbourhood of a simple (hence diagonalizable) endomorphism [23, Theorem II.5.16]. Avoiding semi-simple eigenvalues is necessary as is clear considering

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & -x_1 \end{bmatrix}$$

whose eigenvalues are not differentiable at $(0, 0)$. But even in the simple symmetric nonnegative analytic case, existence of a differentiable square root matrix may fail as illustrated by

$$\begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

To get a positive result with non constant rank, one must actually restrict to the symmetric nonnegative case with analytic dependence on one real variable only. Eigenvalues and eigenvectors are then analytic on the real line [Ibid., Theorem II.6.1 and §II.6.2], and nonnegativeness ensures analyticity of square roots of the eigenvalues.

(iii) In the case of periodic sub-Riemannian systems, the loss of regularity may originate in averaging. The analytical distribution on $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}^2$

$$F_1(l, x) = \sqrt{2}(x_1 \cos l + x_2 \sin l) \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad F_2(l, x) = \frac{\partial}{\partial x_2}$$

has quadratic form

$$\begin{bmatrix} 2(x_1 \cos l + x_2 \sin l)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

whose averaged is (6) which does not even define a differentiable sub-Riemannian system on \mathbf{R}^2 .

(iv) A much stronger requirement is the existence of a change of coordinates on X (inducing a symplectic transformation on the cotangent) so that the averaged quadratic form be diagonal.

For a given $z \in T^*X$, let

$$u(l, z) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k(z) e_k(l), \quad e_k(l) = e^{ikl},$$

denote the Fourier series of the control (4). One has the following convergence result.

Proposition 3.3. *For any positive ε , the normal optimal control is*

$$u_\varepsilon(l) = \varepsilon \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \circ \tilde{z}_\varepsilon(\varepsilon l) e_k(l)$$

and the series converges pointwisely. Moreover, for any $k \in \mathbf{Z}$,

$$c_k \circ \tilde{z}_\varepsilon \rightarrow c_k \circ \bar{z} \text{ uniformly on } [0, 1] \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0+$$

where the sub-Riemannian extremal \bar{z} depends only on the boundary conditions x_0, x_f on X .

Proof. For $l \in [0, l_f]$,

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(l) &= u(l, \tilde{x}_\varepsilon(\varepsilon l), \varepsilon \tilde{p}_\varepsilon(\varepsilon l)) \\ &= \varepsilon u(l, \tilde{x}_\varepsilon(\varepsilon l), \tilde{p}_\varepsilon(\varepsilon l)) \\ &= \varepsilon \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k(\tilde{z}_\varepsilon(\varepsilon l)) e_k(l) \end{aligned}$$

thanks to the pointwise convergence of the Fourier series at l for $z = \tilde{z}_\varepsilon(l)$. For any $k \in \mathbf{Z}$,

$$c_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(l, z) \bar{e}_k(l) dl$$

and the dependence on z is continuous since the integrand is bounded in a compact neighbourhood of the image of \bar{z} . \square

Let us finally denote $\lambda(l, x)$ the biggest (positive) eigenvalue of the nonnegative quadratic form in p

$$|u(l, x, p)|^2 = \omega^2(l, x) \sum_{i=1}^m H_i^2(l, z) = 2\omega(l, x) H_n(l, z),$$

and define

$$\lambda(x) = \max_{l \in \mathbf{S}^1} \lambda(l, x).$$

As a supremum of continuous functions, $x \mapsto \lambda(x)$ is only lower semi-continuous and we must assume the existence of a continuous upper bound in the subsequent result.

Proposition 3.4. *Let σ be a continuous function such that σ^2 dominates λ in a neighbourhood of \bar{x} . Then*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\|u_\varepsilon\|_\infty}{\varepsilon} \leq \|\sigma \circ \bar{x} \cdot |\bar{p}|\|_\infty.$$

Proof. On $[0, l_f]$, one has

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(l)|^2 &= \varepsilon^2 |u(l, \tilde{z}_\varepsilon(\varepsilon l))|^2 \\ &\leq \varepsilon^2 \sigma^2 \circ \tilde{x}_\varepsilon(\varepsilon l) \cdot |\tilde{p}_\varepsilon(\varepsilon l)|^2, \end{aligned}$$

so the result holds since the square root of the right hand side converges uniformly to $\sigma \circ \bar{x} \cdot |\bar{p}|$ as ε goes to zero by continuity of σ . \square

3.3 Computations in Kepler case

Using the neat geometric coordinates of §3.1 on the three dimensional space of ellipses, we get

$$H_n(l, z) = \frac{\omega(l, x)}{2}(H_1^2 + H_2^2)(l, z), \quad u(l, z) = \omega(l, x)(H_1, H_2)(l, z),$$

$$|u(l, z)|^2 = \omega^2(l, x)(H_1^2 + H_2^2)(l, z), \quad (7)$$

with

$$F_1(l, x) = \frac{P^2}{W^2} \left(\sin l \frac{\partial}{\partial e_x} - \cos l \frac{\partial}{\partial e_y} \right),$$

$$F_2(l, x) = \frac{P^2}{W^2} \left(\frac{2P}{W} \frac{\partial}{\partial P} \right. \\ \left. + \left(\cos l + \frac{e_x + \cos l}{W} \right) \frac{\partial}{\partial e_x} + \left(\sin l + \frac{e_y + \sin l}{W} \right) \frac{\partial}{\partial e_y} \right),$$

and

$$\omega(l, x) = \frac{W^2}{P^{3/2}}, \quad W = 1 + e_x \cos l + e_y \sin l.$$

Introducing *mean motion*, $n = a^{-3/2}$, and *true anomaly*, $\tau = l - \theta$, one gets

$$F_1(l, x) = \frac{(1 - e^2)^2}{n^{4/3} W^2} \left(-\frac{3ne \sin \tau}{1 - e^2} \frac{\partial}{\partial n} + \sin \tau \frac{\partial}{\partial e} - \cos \tau \frac{1}{e} \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad (8)$$

$$F_2(l, x) = \frac{(1 - e^2)^2}{n^{4/3} W^2} \left(-\frac{3nW}{1 - e^2} \frac{\partial}{\partial n} + \left(\cos \tau + \frac{e + \cos \tau}{W} \right) \frac{\partial}{\partial e} \right. \\ \left. + \left(\sin \tau + \frac{\sin \tau}{W} \right) \frac{1}{e} \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad (9)$$

with

$$W = 1 + e \cos \tau.$$

As a result, the computation of Fourier series of H_n (or u) are performed with respect to τ rather than l so, as θ only appears through τ ,

$$H_n(l, z) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k(n, e, p) e_k(l - \theta) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k(z) e_k(l),$$

and coefficients verify

$$c_k(z) = c_k(n, e, p) \bar{e}_k(\theta).$$

Proposition 3.5. *The adjoint p_θ is a linear first integral of H .*

Proof. According to the previous remark, θ is cyclic in the averaged Hamiltonian. \square

The remarkable feature of the set (n, e, θ) of coordinates is the following [7, 18, 19].

Proposition 3.6. *The averaged Hamiltonian is Riemannian and orthogonal in (n, e, θ) coordinates,*

$$H(z) = \frac{1}{2n^{5/3}} \left[9n^2 p_n^2 + \frac{5}{2}(1 - e^2) p_e^2 + \frac{5 - 4e^2}{2} \frac{p_\theta^2}{e^2} \right].$$

Fourier coefficients of the control are obviously obtained from (8-9), noting that

Lemma 3.2. *One has*

$$\frac{e + \cos \tau}{W} = -z - \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e} \sum_{k \geq 1} z^k \cos k\tau, \quad \frac{\sin \tau}{W} = -\frac{2}{e} \sum_{k \geq 1} z^k \sin k\tau,$$

where $z = -e/(1 + \sqrt{1-e^2})$ is the only pole in the open unit disk of $W = 1 + e \cos \tau$.

We finally provide a continuous upper bound of the eigenvalues of the quadratic form associated with the control norm, allowing us to estimate precisely $\|u_\varepsilon\|_\infty$ as $\varepsilon \rightarrow 0+$.

Proposition 3.7. *Eigenvalues of the quadratic form (7) are uniformly dominated by*

$$\sigma^2(n, e) = \frac{4(1-e^2)}{n^{2/3}} \left[\frac{(1+e)^2}{n^{4/3}} + 1 \right] + \frac{e}{n^{2/3}} \left[e + \sqrt{1-e^2} \right].$$

Proof. Since we have a rank two distribution (8-9) of vector fields (parameterized by $l \in \mathbf{S}^1$) on the three-dimensional manifold X , a simple computation shows that the maximum eigenvalue is

$$\lambda(l, x) = \frac{\omega^2(l, x)}{2} \left[F_1^2 + F_2^2 + \sqrt{(F_1^2 - F_2^2)^2 + 4(F_1|F_2)^2} \right] (l, x),$$

hence the result. □

The resulting estimate provided by Proposition 3.4 depends only on the geodesic connecting the two prescribed points on the manifold. Complete quadrature for these geodesics are computed in the next section.

3.4 Analysis of the averaged system

The main step in the analysis is to use further normalizations to obtain a geometric interpretation.

Proposition 3.8. *In the elliptic domain, we set*

$$r = \frac{2}{5}n^{5/6}, \quad \varphi = \arcsin e,$$

and the metric is isometric to

$$g = dr^2 + \frac{r^2}{c^2}(d\varphi^2 + G(\varphi)d\theta^2)$$

with

$$c = \sqrt{2/5} \quad \text{and} \quad G(\varphi) = \frac{5 \sin^2 \varphi}{1 + 4 \cos^2 \varphi}.$$

Geometric interpretation. This normal form captures the main properties of the averaged orbital transfer. Indeed, we extract from g two Riemannian metrics in dimension two

$$g_1 = dr^2 + r^2 d\psi^2$$

with $\psi = \varphi/c$ which is associated with orbital transfer where θ is kept fixed, and also

$$g_2 = d\varphi^2 + G(\varphi)d\theta^2$$

which represents the restriction to $r^2 = c^2$.

3.4.1 Analysis of g_1

When p_θ vanishes, θ is constant. The corresponding extremals are geodesics of the Riemannian problem in dimension two defined by $d\theta = 0$. We extend the elliptic domain to the *meridian half-planes* all isometric to

$$\Sigma_0 = \{n > 0, e \in]-1, +1[\}.$$

In polar coordinates (r, ψ) , Σ_0 is defined by $\{r > 0, \psi \in]-\pi/(2c), \pi/(2c)[\}$. This extension allows to go through the singularity corresponding to circular orbits. Geometrically, this describes transfers where the angle of the pericenter is kept fixed and $p_\theta = 0$ corresponds to the transversality condition. Such a policy is clearly associated with steering the system towards circular orbits where the angle θ of the pericenter is not prescribed. An important physical subcase is the geostationary final orbit.

In the domain Σ_0 , the metric $g_1 = dr^2 + r^2 d\psi^2$ is a polar metric isometric to the flat metric $dx^2 + dz^2$ if we set $x = r \sin \psi$ and $z = r \cos \psi$.

We deduce the following proposition.

Proposition 3.9. *The extremals of the averaged coplanar transfer in Σ_0 are straight lines in suitable coordinates, namely*

$$x = \frac{2^{3/2}}{5} n^{5/6} \sin(c^{-1} \arcsin e), \quad z = \frac{2^{3/2}}{5} n^{5/6} \cos(c^{-1} \arcsin e)$$

with $c = \sqrt{2/5}$. Since $c < 1$, the domain is not convex and the metric g_1 is not complete.

Proof. The axis $e_x = 0$ corresponds to circular orbits. Among the extremals, we have two types (see Fig. 1): complete curves of type 1, and non-complete curves of type 2 that meet the boundary of the domain. The domain is not geodesically convex and in subdomain II, the existence theorem fails. For each initial condition, there exists a separatrix S which corresponds to a segment line in the orbital coordinates which is meeting $n = 0$ in finite time. Its length gives the bound for a sphere to be compact. \square

In order to complete the analysis of g and to understand the role of g_2 , we present now the integration algorithm.

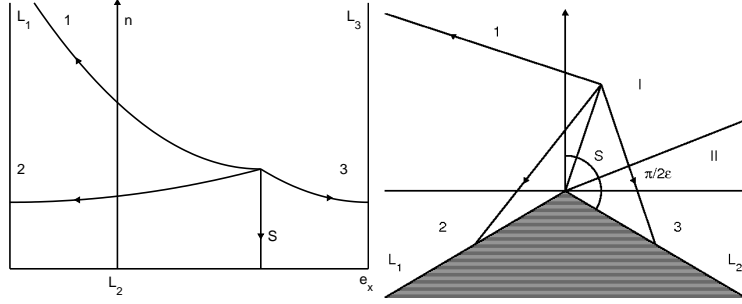


Figure 1: Geodesics of the metric g_1 in (n, e_x) and flat coordinates.

3.4.2 Integrability of the extremal flow

The integrability property is a consequence of the normal form only,

$$g = dr^2 + r^2(d\varphi^2 + G(\varphi)d\theta^2),$$

and the associated Hamiltonian is decomposed into

$$H = \frac{1}{2}p_r^2 + \frac{1}{r^2}H', \quad H' = \frac{1}{2}\left(p_\varphi^2 + \frac{p_\theta^2}{G(\varphi)}\right).$$

Lemma 3.3. *The Hamiltonian vector field \vec{H} admits three independent first integrals in involution, H , H' , p_θ , and is Liouville integrable.*

To get a complete parameterization, we proceed as follows. We use the (n, e, θ) coordinates and write

$$H = \frac{1}{4n^{5/3}}[18n^2p_n^2 + H'']$$

with

$$H'' = 5(1 - e^2)p_e^2 + \frac{5 - 4e^2}{e^2}p_\theta^2.$$

Lemma 3.4. *Let $s = n^{5/3}$ then $s(t)$ is a polynomial of degree 2, $s(t) = c_1t^2 + \dot{s}(0)t + s(0)$ with $s(0) = n^{5/3}(0)$, $\dot{s}(0) = 15n(0)p_n(0)$ and $c_1 = 25H/2$.*

Lemma 3.5. *Let $dT = dt/4n^{5/3}$. If $H''(0) \neq 0$, then*

$$T(t) = \frac{1}{2\sqrt{|\Delta|}}[\arctan L(s)]_0^t$$

where $L(t) = (2at + b)/\sqrt{|\Delta|}$, $a = c_1$, $b = \dot{s}(0)$ and $\Delta = -25H''(0)/2$ is the discriminant of $s(t)$.

This allows to make the integration. Indeed if $H'' = 0$, $p_e = p_\theta = 0$ and the trajectories are straight lines (the line S in Fig. 1). Otherwise, we observe that $n^{5/3}(t)$ is known and depends only upon $n(0)$, $p_n(0)$ and H which can be fixed to 1/2 by parameterizing by arc length. Hence, it is sufficient to integrate the flow associated with H'' using the parameter $dT = \frac{dt}{4n^{5/3}}$ where T is given by

the previous lemma. Let $H'' = c_3^2$ and $p_\theta = c_2$. Using $p_e = \dot{e}/10(1 - e^2)$, we obtain

$$\dot{e}^2 = \frac{20(1 - e^2)}{e^2} [c_3 e^2 - (5 - 4e^2)c_2^2].$$

To integrate, we set $w = 1 - e^2$ for $e \in]0, 1[$, so the equation takes the form

$$\frac{dw}{dT} = Q(w)$$

where

$$Q(w) = 80w[(c_3^2 - c_2^2) - (c_3^2 + 4c_2^2)w]$$

with positive discriminant. Hence the solution is

$$w = \frac{1}{2} \frac{c_3^2 - c_2^2}{c_3^2 + 4c_2^2} \left[1 + \sin\left(\frac{4}{\sqrt{5}} \sqrt{c_3^2 + 4c_2^2} T + K\right) \right],$$

K being a constant. We deduce that

$$\theta(T) = \theta(0) + 2c_2 \int_0^T \frac{1 + 4w(s)}{1 - w(s)} ds$$

where $\theta(0)$ can be set to 0 by symmetry. To conclude, we must integrate $(1 + 4w(s))/(1 - w(s))$ with $w = K_1(1 + \sin x)$ and $x = (4s/\sqrt{5})\sqrt{c_3^2 + 4c_2^2} + K$. Therefore, we must evaluate an integral of the form

$$\int \frac{A + B \sin x}{C + D \sin x} dx.$$

More precisely, the formula is

$$\int \frac{A + B \sin x}{C + D \sin x} dx = \frac{B}{D} x + AD - BC \int \frac{dx}{C + D \sin x}$$

with

$$\int \frac{dx}{C + D \sin x} = \frac{2}{\sqrt{C^2 - D^2}} \arctan\left(\frac{C \tan(x/2) + D}{\sqrt{C^2 - D^2}}\right)$$

and $C^2 - D^2 > 0$. The previous lemmas and computations give

Proposition 3.10. *For $H'' \neq 0$, the solutions of \vec{H} can be computed using elementary functions and*

$$\begin{aligned} n(t) &= \left[\frac{25}{2} H t^2 + 15n(0)p_n(0)t + n^{5/3}(0) \right]^{3/5}, \\ e(t) &= \sqrt{1 - K_1(1 + \sin K_2(t))}, \\ \theta(t) &= \theta(0) + \frac{p_\theta}{2|p_\theta|} K_3 \left[-4x + \frac{10}{K_3} \arctan \frac{(1 - K_1) \tan(x/2) - K_1}{K_3} \right]_K^{K_2(t)}, \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} K &= \arcsin\left(\frac{1 - e(0)^2}{K_1} - 1\right), \quad K_1 = \frac{1}{2} \frac{H''(0) - p_\theta^2}{H''(0) + 4p_\theta^2}, \\ K_2(t) &= \frac{4}{\sqrt{5}} \left(T(t) \sqrt{H''(0) + 4p_\theta^2} + K \right), \quad K_3 = \sqrt{\frac{5p_\theta^2}{H''(0) + 4p_\theta^2}}. \end{aligned}$$

For $H'' = 0$, they are straight lines.

Remark 3.3. The above formulas give the complete solution of the associated Hamilton-Jacobi Equation.

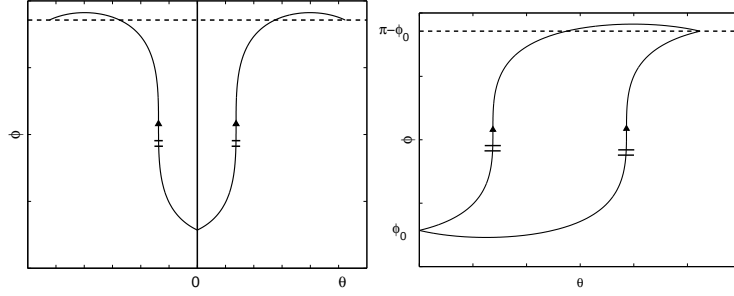


Figure 2: Action of the symmetry group on the extremals.

3.4.3 Geometric properties of g_2

The previous integration algorithm shows that the extremals of this metric describe the evolution of the angular variables θ and φ parameterized by $dT = dt/r(t)^2$ where $r(t)^2$ is a second order polynomial whose coefficients depend only upon the energy level H fixed to $1/2$, $r(0)$ and $p_r(0)$. We now give some basic properties of g_2 .

Lemma 3.6. *The metric g_2 can be extended to an analytic metric on the whole sphere \mathbf{S}^2 , where θ and φ are spherical coordinates with two polar singularities at $\varphi = 0$ or π corresponding to $e = 0$, whereas the equator corresponds to $e = 1$; θ is an angle of revolution. The meridians are projections on \mathbf{S}^2 of the extremals of g_1 .*

Lemma 3.7. *The two transformations $(\varphi, \theta) \mapsto (\varphi, -\theta)$ and $(\varphi, \theta) \mapsto (\pi - \varphi, \theta)$ are isometry of g_2 . This induces the following symmetries for the extremal flow:*

- if $p_\theta \mapsto -p_\theta$ then we have two extremals of same length symmetric with respect to the meridian $\theta = 0$,
- if $p_\varphi \mapsto -p_\varphi$ then we have two extremals of same length intersecting on the antipodal parallel, $\varphi = \pi - \varphi(0)$.

Such properties (illustrated on Fig. 3.4.3) are shared by the following one-parameter family of metrics.

Metrics induced by the flat metric on oblate ellipsoid of revolution.

We consider the flat metric of \mathbf{R}^3 , $g = dx^2 + dy^2 + dz^2$, restricted to the ellipsoid defined by

$$x = \sin \varphi \cos \theta, \quad y = \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \mu \cos \varphi$$

where $\mu \in]0, 1[$. A simple computation leads to

$$E_\mu(\varphi)d\varphi^2 + \sin^2 \varphi d\theta^2$$

for the restricted metric, where $E_\mu(\varphi) = \mu^2 + (1 - \mu^2) \cos^2 \varphi$, and we can write

$$g_2 = \frac{1}{E_\mu(\varphi)}(E_\mu(\varphi)d\varphi^2 + \sin^2 \varphi d\theta^2)$$

where $\mu = 1/\sqrt{5}$. We deduce the following lemma.

Lemma 3.8. *The metric g_2 is conformal to the flat metric restricted to an oblate ellipsoid of revolution with parameter $\mu = 1/\sqrt{5}$.*

3.4.4 A global optimality result with application to orbital transfer

In this section, we consider an analytic metric on $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{S}^2$

$$g = dr^2 + (d\varphi^2 + G(\varphi)d\theta^2)$$

and let H be the associated Hamiltonian. We fix the parameterization to arc length by restricting to the level set $H = 1/2$. Let x_1, x_2 be two extremal curves starting from the same initial point x_0 and intersecting at some positive \bar{t} . We get the relations

$$r_1(\bar{t}) = r_2(\bar{t}), \quad \varphi_1(\bar{t}) = \varphi_2(\bar{t}), \quad \theta_1(\bar{t}) = \theta_2(\bar{t}),$$

and from Lemma 3.4, we deduce that

Lemma 3.9. *Both extremals x_1 and x_2 share the same $p_r(0)$ and for each t , $r_1(t) = r_2(t)$.*

If we consider now the integral curves of H' where $H = (1/2)p_r^2 + H'/r^2$ on the fixed induced level and parameterize these curves using $dT = dt/r^2$, we deduce the following characterization.

Proposition 3.11. *The following conditions are necessary and sufficient to characterize extremals of $H' \neq 0$ intersecting with same length*

$$\varphi_1(\bar{T}) = \varphi_2(\bar{T}) \quad \text{and} \quad \theta_1(\bar{T}) = \theta_2(\bar{T})$$

together with the compatibility condition

$$\bar{T} = \int_0^{\bar{t}} \frac{dt}{r^2(t)} = \left[\frac{2}{\sqrt{\Delta}} \arctan L(t) \right]_{t=0}^{\bar{t}}.$$

Theorem 3.2. *A necessary global optimality condition for an analytic metric on $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{S}^1$ normalized to*

$$g = dr^2 + r^2(d\varphi^2 + G(\varphi)d\theta^2)$$

is that the injectivity radius be greater than or equal to π on the sphere $r = 1$, the bound being reached by the flat metric in spherical coordinates.

Proof. We observe that in the flat case, the compatibility condition cannot be satisfied. Moreover, the injectivity radius on \mathbf{S}^2 is π corresponding to the half-length of a great circle. For the analytic metric on \mathbf{S}^2 under consideration, the injectivity radius is the length of the conjugate point at minimum distance or the half-length of a closed geodesic [17]. The conjugate point is, in addition, a limit point of the separating line. Hence, if the injectivity radius is smaller than π , we have two minimizers for the restriction of the metric on \mathbf{S}^2 which intersects with a length smaller than π . We shall show that it corresponds to a projection of two extremals x_1 and x_2 which intersect with same length.

For such extremals $r(0) = 1$, we set $p_r(0) = \varepsilon$, $H = 1/2$ and we get

$$2H' = p_\varphi^2(0) + \frac{p_\theta^2(0)}{G(\varphi(0))} = \lambda^2(\varepsilon), \quad \lambda(\varepsilon) = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

If t_1 is the injectivity radius on the level set $H' = 1/2$, for $H' = \lambda^2(\varepsilon)/2$ and $p_r(0) = \varepsilon$, it is rescaled to $T_1 = t_1/\lambda(\varepsilon)$. The compatibility relation for $\bar{T} = T_1$ then gives

$$T_1 = \arctan \frac{\bar{t} + \varepsilon}{\lambda(\varepsilon)} - \arctan \frac{\varepsilon}{\lambda(\varepsilon)}.$$

Clearly, the maximum of the right member is π , taking $\varepsilon < 0$, $|\varepsilon| \rightarrow 1$. Hence, it can be satisfied since $t_1 < \pi$. The flat case shows that it is the sharpest bound. \square

By homogeneity, we deduce the following corollary.

Corollary 3.1. *If the metric is normalized to $dr^2 + (r^2/c^2)(d\varphi^2 + G(\varphi)d\theta^2)$, then the bound for the injectivity radius on $r^2 = c^2$ is $c\pi$.*

3.4.5 Riemannian curvature and injectivity radius in orbital transfer

Using standard formulæ from Riemannian geometry [17], we have the following proposition.

Proposition 3.12. *Let g be a smooth metric of the form $dr^2 + r^2(d\varphi^2 + G(\varphi)d\theta^2)$. The only non-zero component of the Riemann tensor is*

$$R_{2323} = r^2 \left[-\frac{G''(\varphi)}{2} - G(\varphi) + \frac{G'(\varphi)^2}{4G(\varphi)} \right]$$

which takes the form $R_{2323} = -r^2 F(F'' + F)$ if we set $G(\varphi) = F^2(\varphi)$. We have therefore $R_{2323} = 0$ if and only if $F(\varphi) = A \sin(\varphi + \varphi_0)$ which is induced by the flat case in spherical coordinates.

Hence, the main non-zero sectional curvature of the metric is

$$K = \frac{R_{2323}}{\left| \frac{\partial}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial}{\partial \varphi} \right|^2}$$

and computing this term in the case of orbital transfer, we get:

Lemma 3.10. *The sectional curvature in the plane (φ, θ) is given by*

$$K = \frac{(1 - 24 \cos^2 \varphi - 16 \cos^4 \varphi)}{r^2(1 + 4 \cos^2 \varphi)^2}$$

and $K \rightarrow 0$ as $r \rightarrow +\infty$.

Proposition 3.13. *The Gauss curvature of the metric of $g_2 = d\varphi^2 + G(\varphi)d\theta^2$ with $G(\varphi) = (\sin^2 \varphi)/(1 + 4 \cos^2 \varphi)$ is*

$$K = \frac{5(1 - 8 \cos^2 \varphi)}{(1 + 4 \cos^2 \varphi)^2}.$$

Theorem 3.3. *The Gauss curvature of g_2 is negative near the poles and maximum at the equator. The injectivity radius is $\pi/\sqrt{5}$ and is reached by the shortest conjugate point along the equator.*

Proof. Clearly K is maximum and equal to five along the equator which is an extremal solution. Hence a direct computation gives that the shortest conjugate point is on the equator with length $\pi/\sqrt{5}$. It corresponds to the injectivity radius if the half-length of a shortest periodic extremal is greater than $\pi/\sqrt{5}$. Simple closed extremals are computed in [8] using the integrability property and a simple reasoning gives that the shortest corresponds to meridians whose length is 2π . Hence the result is proved. \square

Corollary 3.2. *Since $\pi/\sqrt{5} < \pi\sqrt{2/5}$, the necessary optimality condition of Theorem 3.3 is not satisfied in orbital transfer for the extension of the metric to $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{S}^2$.*

3.4.6 Cut locus on \mathbf{S}^2 and global optimality results in orbital transfer

From the previous section, the computation of the injectivity radius for the metric on \mathbf{S}^2 is not sufficient to conclude about global optimality. A more complete analysis is necessary to evaluate the cut locus. This analysis requires numerical simulations. The main results are [8, 11]:

Proposition 3.14. *For the metric g_2 on \mathbf{S}^2 , they are exactly five simple closed geodesics modulo rotations around the poles, the shortest being meridians with length 2π , the longest the equator with length $2\pi\sqrt{5}$.*

Theorem 3.4. *Except for poles, the conjugate locus is a deformation of a standard astroid with axial symmetry and two cusps located on the antipodal parallel. With the exception of poles, the cut locus is a simple segment, located on the antipodal parallel, with axial symmetry, and whose extremities are cusps points of the conjugate locus. For a pole, the cut locus is reduced to the antipodal pole.*

Proof. The proof is made by direct analysis of the extremal curves. The main problem is to prove that the separating line is given by points on the antipodal parallel where, because of the isometry $\varphi \rightarrow \pi - \varphi$, two extremals curves with same length intersect. This property cannot occur before. The results are represented Fig. 3. \square

Geometric interpretation and comments. The metric is conformal to the restriction of the flat metric to an oblate ellipsoid of revolution. For such a metric, the cut locus is known since Jacobi and is similar to the one represented on Fig. 3. It is a remarkable property that there is no bifurcation of the cut locus when the metric is deformed by the factor $E_\mu(\varphi)$. In orbital transfer for instance, the Gauss curvature is not positive. On \mathbf{S}^2 , relations between the conjugate and cut loci allow to deduce the cut locus from the conjugate locus.² The conjugate locus can also easily be computed using the code [12]. It can also be deduced by inspecting the extremal flow only, the conjugate locus being an envelope.

²For instance, a domain bounded by two intersecting minimizing curves must contain a conjugate point.

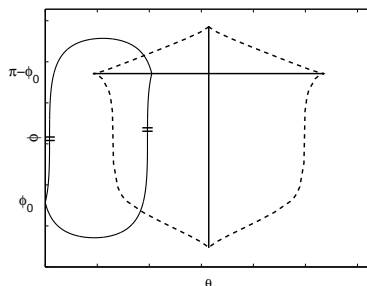


Figure 3: Conjugate and cut loci in averaged orbital transfer.

Finally, we observe that in order to have intersecting minimizers, we must cross the equator $\varphi = \pi$, that is $e = 1$. The same is true for conjugate points. Hence we deduce

Theorem 3.5. *Conjugate loci and separating lines of the averaged Kepler metric are always empty in the spaces of ellipses where $e \in [0, 1]$.*

3.5 The averaged system in the tangential case

An interesting question is to analyze if the averaged system in the *tangential case* where the control is oriented along F_t retains similar properties [10]. The first step is to compute the corresponding averaged system.

Proposition 3.15. *If the control is oriented along F_t only, the averaged Hamiltonian associated with energy minimization is*

$$H_t = \frac{1}{2n^{5/3}} \left[9n^2 p_n^2 + \frac{4(1-e^2)^{3/2}}{1+\sqrt{1-e^2}} p_e^2 + \frac{4(1-e^2)}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{p_\theta^2}{e^2} \right]$$

and corresponds to the Riemannian metric

$$g_t = \frac{dn^2}{9n^{1/3}} + \frac{n^{5/3}}{4} \left[\frac{1+\sqrt{1-e^2}}{(1-e^2)^{3/2}} de^2 + \frac{1+\sqrt{1-e^2}}{(1-e^2)} e^2 d\theta^2 \right]$$

where (n, e, θ) remain orthogonal coordinates.

3.5.1 Construction of the normal form

We proceed as in Section 3.4 and set

$$r = \frac{2}{5}n^{5/6}, \quad e = \sin \varphi \sqrt{1 + \cos^2 \varphi}.$$

The metric becomes

$$g_t = dr^2 + \frac{r^2}{c^2} (d\varphi^2 + G(\varphi) d\theta^2), \quad c = \frac{2}{5} < 1,$$

and

$$G(\varphi) = \sin^2 \varphi \left(\frac{1 - (1/2) \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi} \right)^2.$$

Hence the normal form is similar to the full control case. As before, we introduce the metrics

$$g_1 = dr^2 + r^2 d\psi^2, \quad \psi = \varphi/c,$$

and

$$g_2 = d\varphi^2 + G(\varphi)d\theta^2.$$

The main difference with the full control case will concern the singularities of the function G .

3.5.2 Metrics g_1 and g_2

The metric g_1 corresponds again to transfer to circular orbits and is the polar form of the flat metric $dx^2 + dz^2$, if $x = r \sin \psi$ and $z = r \cos \psi$.

The normal form reveals the same homogeneity property between the full control and the tangential case, so the metric g_2 can be used to make a similar optimality analysis, evaluating the conjugate and cut locus. But the metric g_2 cannot be interpreted as a smooth metric on \mathbf{S}^2 . This can be seen by computing the Gauss curvature.

Proposition 3.16. *The Gauss curvature of g_2 is given by*

$$K = \frac{(3 + \cos^2 \varphi)(\cos^2 \varphi - 2)}{(1 + \cos^2 \varphi) \cos^2 \varphi}.$$

In particular $K \rightarrow -\infty$ when $\varphi \rightarrow \pi/2$, and since $K < 0$, the conjugate locus of any point is empty.

Nevertheless, the extremals can be smoothly extended through the singular boundary of the domain, the equator $\varphi = \pi/2$.

3.5.3 Integration of the extremal flow

The algorithm based on the normal form is similar to the bi-input case, but we compare the respective transcendence. The Hamiltonian is written

$$H = \frac{1}{4n^{5/3}} [18n^2 p_n^2 + H'']$$

where H'' now takes the form

$$H'' = \frac{8(1 - e^2)^{3/2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}} p_e^2 + \frac{8(1 - e^2)}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \frac{p_\theta^2}{e^2}.$$

We set $H'' = c_3^2$, $p_\theta = c_2$, and from

$$p_e = 4n^{5/3} \frac{(1 + \sqrt{1 - e^2})e}{16(1 - e^2)^{3/2}}$$

we obtain

$$\left(\frac{dw}{dT} \right)^2 = \frac{Q(w)}{(1 + w)^2}$$

where $w = \sqrt{1 - e^2}$, T is as in the bi-input case, and Q is the fourth-order polynomial

$$Q(w) = 32w[c_3^2(1 - w^2)(1 + w) - 8c_2^2 w^2].$$

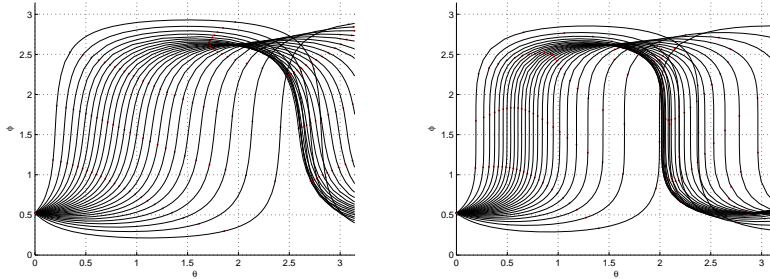


Figure 4: Extremal flow of g_2 in the full control and tangential cases, in the (φ, θ) coordinates, starting from $\varphi = \pi/6$.

Hence, the integration requires the computation of the elliptic integral

$$\int \frac{dw(1+w)}{\sqrt{Q(w)}}$$

which has an additional complexity. It is related to the pole of order 2 of the metric at the equator. See [9] for both aspects.

3.5.4 Conclusion in both cases

The previous analysis shows that the full control case and the tangential one admit a uniform representation in coordinates (θ, φ) . In particular, it allows to make a continuation between the respective Hamiltonians, i.e., between the respective functions G . A correction has to be made between orbit elements e which are respectively defined by

$$e = \sin \varphi \quad \text{versus} \quad e = \sin \varphi \sqrt{1 + \cos^2 \varphi}.$$

The flows in the two cases are presented on Fig. 4 and reveal the similar structure. The conjugate locus is reached after having crossed the equator. On Fig. 5 and 6 we present a first continuation result, in the tangential case, showing the convergence of the method from the averaged to the non averaged trajectory for specific transfer orbits.

3.6 Conjugate and cut loci on a two-sphere of revolution

The problem of computing the conjugate and cut loci in orbital transfer is connected to a very old geometric problem which goes back to Jacobi and is briefly introduced next.

Definition 3.1. The two-sphere \mathbf{S}^2 endowed with a smooth metric of the form $d\varphi^2 + G(\varphi)d\theta^2$ in spherical coordinates is called *two-sphere of revolution*.

Many of them can be realized as Riemannian surfaces of revolution embedded in \mathbf{R}^3 by rotating on a smooth curve homeomorphic to a half-circle. The classical examples are the following:

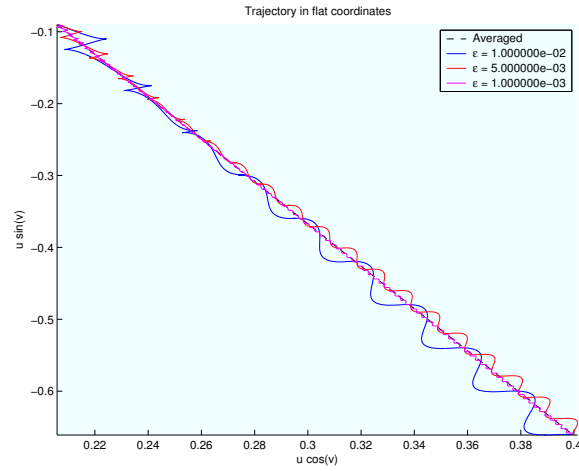


Figure 5: Computation by continuation of the non-averaged solution. The averaged trajectories are clearly nice approximations of the optimal ones of the original system. Hence, convergence of the underlying shooting method to compute the non-averaged minimizing trajectory is easily obtained.

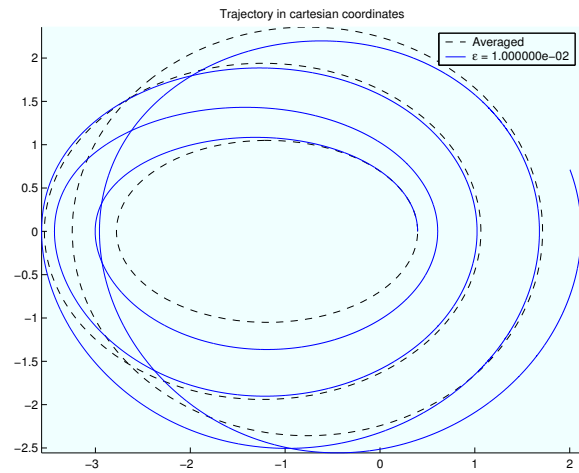


Figure 6: Trajectory of a non-averaged solution for $\varepsilon = 1e-2$ with $(e(0), n(0)) = (7.5e-1, 5e-1)$ and $(e(t_f), n(t_f)) = (5e-2, 3e-1)$. Dashed ellipses are averaged ellipses and provide a good approximation of the motion.

- *Round sphere* \mathbf{S}^2 . It is constructed restricting the Euclidian metric to \mathbf{S}^2 and given by $d\varphi^2 + \sin^2(\varphi)d\theta^2$.
- *Oblate ellipsoid of revolution* $O(\mu)$. If we restrict the Euclidian metric to the surface

$$x = \sin \varphi \cos \theta, \quad y = \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \mu \cos \varphi,$$

with $\mu < 1$, the metric is $(1 - (1 - \mu^2) \sin^2 \varphi)d\varphi^2 + \sin^2(\varphi)d\theta^2$ which can be set in the form $d\varphi^2 + G(\varphi)d\theta^2$ using a quadrature.

We recall some basic properties on the ellipsoid of revolution.

Proposition 3.17. *On an oblate ellipsoid of revolution,*

- *the Gauss curvature is monotone increasing from the North pole to the equator,*
- *the cut locus of a point which is not a pole is a subarc of the antipodal parallel,*
- *the conjugate locus of a point which is not a pole has a standard astroid shape with four cusps.*

The simple structure of the cut locus is a consequence of [31].

Theorem 3.6. *Let $d\varphi^2 + G(\varphi)d\theta^2$ be a metric on a two-sphere of revolution. We assume:*

- *The transformation $\varphi \rightarrow \pi - \varphi$ is an isometry i.e. $G(\pi - \varphi) = G(\varphi)$,*
- *The Gauss curvature K is monotone non decreasing along a meridian from the North pole to the equator.*

Then, the cut locus of a point not a pole is a simple branch located on the antipodal parallel.

Application. Let g_λ be the family of analytic metrics on \mathbf{S}^2 defined by

$$g_\lambda = d\varphi^2 + G_\lambda(\varphi)d\theta^2, \quad G_\lambda(\varphi) = \frac{(1 + \lambda)^2 \sin^2 \varphi}{(1 + \lambda \cos^2 \varphi)}, \quad \lambda \geq 0.$$

The Gauss curvature is given by

$$K_\lambda = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial^2 \varphi} = \frac{(1 + \lambda)(1 - 2\lambda \cos^2 \varphi)}{(1 + \lambda \cos^2 \varphi)^2}.$$

Hence if $0 < \lambda \leq 2$, then K_λ is monotone non decreasing from the North pole to the equator and the previous theorem asserts that the one parameter family has a cut locus reduced to a simple branch for $\lambda \in]0, 2]$.

If $\lambda > 2$ the Gaussian curvature K_λ is not monotone and the result cannot be applied. In particular the orbit transfer with full control corresponds to $\lambda = 4$, while at the limit case $\lambda = +\infty$ a singularity appears. The Riemannian metric has a pole at the equator, the situation being similar to the one occurring when the thrust is only tangential. Hence Theorem 3.6 has to be refined to deal with such situations. The final result is coming from [9].

We consider a metric of the form $g = \varphi^2 + G(\varphi)d\theta^2$ where G' is non zero on $]0, \frac{\pi}{2}[$ and $G(\pi - \varphi) = G(\varphi)$.

Definition 3.2. The *first return mapping* to the equator is the map

$$\Delta\theta : p_\theta \in]0, \sqrt{G}(\pi/2)[\mapsto \Delta\theta(p_\theta)$$

that is the θ -variation of the extremal parameterized by arc length and associated with the adjoint vector component p_θ . The extremal flow is called *tame* if the first return mapping is monotone non-increasing for $p_\theta \in]0, \sqrt{G}(\pi/2)[$.

Theorem 3.7. *In the tame case, the cut locus of a point different from a pole is a subset of the antipodal parallel. If moreover $\Delta\theta'(p_\theta) < 0 < \Delta\theta''(p_\theta)$ on $]0, \sqrt{G}(\pi/2)[$, then the conjugate locus of such a point has exactly four cusps.*

Remark 3.4. This result can be extended to the singular case where the metric has poles at the equator.

4 Energy minimization in the Earth-Moon space mission with low thrust

4.1 The N-body problem

In this section, we follow mainly [25] (see also [27] and [32]). Consider N point masses m_1, \dots, m_N moving in a Galilean reference system \mathbf{R}^3 where the only forces acting are their mutual attractions. If $q = (q_1, \dots, q_N) \in \mathbf{R}^{3N}$ is the state and $p = (p_1, \dots, p_N)$ is the momentum vector, the equations of motion are

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

where the Hamiltonian is

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{|p_i|^2}{2m_i} - U, \quad U(q) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{Gm_i m_j}{|q_i - q_j|}.$$

A subcase is the coplanar situation where the N masses are in a plane \mathbf{R}^2 . In this case the Galilean reference frame can be replaced by a rotating frame defined by

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \exp(\omega t K) = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix},$$

and introducing a set of coordinates which uniformly rotates with frequency ω , one defines the symplectic transformation

$$u_i = \exp(\omega t K) q_i, \quad v_i = \exp(\omega t K) p_i.$$

A standard computation gives the Hamiltonian of the N -body problem in rotating coordinates,

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{|v_i|^2}{2m_i} - \sum_{i=1}^N \omega^t u_i K v_i - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{Gm_i m_j}{|q_i - q_j|}.$$

In particular, the Kepler problem in rotating coordinates up to a normalization has the following Hamiltonian

$$H = \frac{|p|^2}{2} - {}^t q K p - \frac{1}{|q|}.$$

4.2 The circular restricted 3-body problem in Jacobi coordinates

The following representation of the Earth-Moon problem fits in the so-called *circular restricted 3-body problem*. In the rotating frame, the Earth which is the biggest primary planet with mass $1 - \mu$ is located at $(-\mu, 0)$ while the Moon with mass μ is located at $(1 - \mu, 0)$ (the small parameter being $\mu \simeq 1.2153e - 2$). We note $z = x + iy$ the position of the spacecraft, and ρ_1, ρ_2 the distances to the primaries,

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}, \\ \rho_2 &= \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2}.\end{aligned}$$

The equation of motion is

$$\ddot{z} + 2i\dot{z} - z = -(1 - \mu)\frac{z + \mu}{\rho_1^3} - \mu\frac{z - 1 + \mu}{\rho_2^3}$$

that is

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - x = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} - y = \frac{\partial V}{\partial y},$$

where $-V$ is the potential of the system defined by

$$V = \frac{1 - \mu}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3}.$$

The system can be written using Hamiltonian formalism setting

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad p_1 = \dot{x} - y, \quad p_2 = \dot{y} + x,$$

and the Hamiltonian describing the motion writes

$$H_0(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + p_1 q_2 - p_2 q_1 - \frac{1 - \mu}{\rho_1} - \frac{\mu}{\rho_2}.$$

4.3 Jacobi integral, Hill regions and equilibrium points

The Jacobi integral using Hamiltonian formalism is simply the Hamiltonian H_0 which gives

$$H(x, y, \dot{x} - y, \dot{y} + x) = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - \Omega(x, y)$$

where

$$\Omega(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2}.$$

Solutions are confined on the level set

$$\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - \Omega(x, y) = h, \quad h \text{ constant.}$$

The *Hill domain* for the value h is the region where the motion can occur, that is $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \Omega(x, y) + h \geq 0\}$.

The equilibrium points of the problem are well known. They split into two different types:

- *Euler points*. They are the collinear points denoted L_1 , L_2 and L_3 located on the line $y = 0$ defined by the primaries. For the Earth-Moon problem they are given by

$$x_1 \simeq -1.0051, \quad x_2 \simeq 8.369e - 1, \quad x_3 \simeq 1.1557.$$

- *Lagrange points*. The two points L_4 and L_5 form with the two primaries an equilateral triangle.

Some important information about stability of the equilibrium points are provided by the eigenvalues of the linearized system. The linearized matrix evaluated at points L_1 , L_2 or L_3 admits two real eigenvalues, one being strictly positive, and two imaginary ones. The collinear points are consequently not stable. In particular, the eigenvalues of the linearized matrix evaluated at L_2 with $\mu = 1.2153e - 2$ are approximately ± 2.931837 and $\pm 2.334248i$. When it is evaluated at L_4 or L_5 , the linearized matrix has two imaginary eigenvalues since $\mu < \mu_1 = (1/2)(1 - \sqrt{69}/9)$ in the Earth-Moon system. Points L_4 and L_5 are thus stable according to Arnold stability theorem [25]. See also [24] for a review of mission design techniques using the equilibrium points.

4.4 The continuation method

The mathematical continuation method in the restricted circular problem is omnipresent in Poincaré’s work, in particular for the continuation of circular orbits [26]. Geometrically, it is simply a continuation of trajectories of Kepler problem into trajectories of the 3-body problem. It amounts to considering μ as a small parameter—the limit case $\mu = 0$ being Kepler problem in the rotating frame—writing

$$H_0 = \frac{|p|^2}{2} - {}^t q K p - \frac{1}{|q|} + o(\mu).$$

The approximation for μ is valid, a neighbourhood of the primaries being excluded. In the Earth-Moon problem, since μ is very small, the Kepler problem is a good approximation of the motion in a large neighbourhood of the Earth.

4.4.1 The control problem

The control system in the rotating frame is deduced from the previous model and can be written in Hamiltonian form

$$\frac{dx}{dt} = \vec{H}_0(x) + u_1 \vec{H}_1(x) + u_2 \vec{H}_2(x)$$

where $x = (q, p)$, \vec{H}_0 is the free motion and \vec{H}_1, \vec{H}_2 are given by $\vec{H}_i = -q_i$, $i = 1, 2$. As for the Kepler problem, the mass variation of the satellite can be introduced in the model dividing u_i by $m(t)$ and adding the equation $\dot{m} = -\delta|u|$. Again, it will be not taken into account here. Moreover we still restrict our analysis to the energy minimization problem with fixed final time t_f and control valued in \mathbf{R}^2 . The physical problem which is to maximize the final mass can be analyzed using a continuation method. Preliminary results in the minimum time case are given in [15].

A lunar mission using low propulsion called SMART-1 was realized by ESA and the practical details of the mission—in particular the description of the trajectory—are reported in [29, 30]. We present a trajectory analysis based on our geometric and numerical techniques. For simplicity, we have fixed the boundary conditions to circular orbits, the one around the Earth corresponding to the geostationary one. But everything can be applied to other boundary conditions, for instance those described in the report status of the SMART-1 mission. A trajectory comparison is discussed in the final section (see also [6]).

Our analysis is based on a numerical continuation, including second-order optimality check, where μ is the parameter of the continuation. The averaged system is finally applied to get an approximate energy minimizing trajectory for the phase of the mission that starts from the circular Earth orbit and aims at a quasi-elliptic orbit where the apogee is about 338000 Kilometers. In the restricted problem approximation, the effect of the inclination (around 30 degrees in phase two of the mission) is not modelled here.

4.4.2 Numerical continuation for the Earth- L_2 transfer

As a first approach we choose to simulate the Earth- L_2 transfer in the restricted 3-body problem. Indeed, in the limit case $\mu = 0$, the Moon and the point L_2 are identical. Moreover, in the Earth-Moon system, the point L_2 and the Moon are very close. As a result, the first phase of an Earth-Moon transfer is comparable to an Earth- L_2 transfer. Solving the shooting function associated with the Earth- L_2 transfer is consequently useful to provide a good approximation of the solution of the Earth-Moon transfer shooting function.

Using a circular orbit around the Earth for the geostationary one, we set as initial condition $x_0 = (1 - \mu + 1.099e - 1, 0, 0, 2.8792)$. The point L_2 is located on $(x_{L_2}, 0)$ with x_{L_2} solution of the equation

$$x - \frac{(1 - \mu)(x + \mu)}{\rho_1^3} - \frac{\mu(x - 1 + \mu)}{\rho_2^3} = 0.$$

Since we want to reach L_2 with a zero speed, we fix the target $x_f = (x_{L_2}, 0, 0, 0)$. By making the parameter μ vary from zero, one builds up a family $(S_\mu)_\mu$ of shooting functions which connects the Kepler and the 3-body problem. The numerical continuation method can be applied to deduce low thrust extremal trajectories of the Earth- L_2 transfer from the Kepler ones.

In accordance with the report status of ESA, we fix the transfer time to 121 time units of the restricted 3-body problem, which approximately corresponds to the transfer time from the Earth to the point L_2 during the SMART-1 mission (about 17 months). In addition, we consider a constant spacecraft mass of 350 Kilograms, see [29, 30]. Setting $\mu = 0$, we compute an extremal using the shooting method, then increase μ up to $1.2153e - 2$ with a discrete continuation. At each step, the first conjugate time along the extremal is computed to ensure convergence of the continuation method. The Euclidian norm of the extremal control is plotted Fig. 14 to draw a comparison between the control bound and the maximum thrust allowed by electro-ionic engines. Figs. 7 to 14 present the computed spacecraft trajectories in both rotating and fixed frames, as well as the first conjugate time and the norm of the control along trajectories in Kepler and Earth-Moon systems.

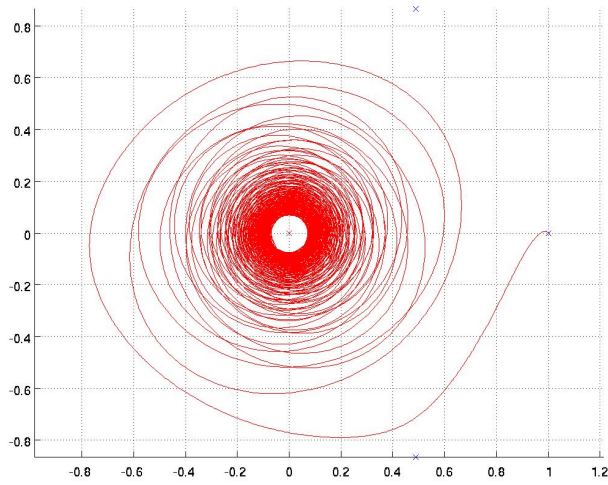


Figure 7: Earth- L_2 trajectory in the rotating frame, $\mu = 0$.

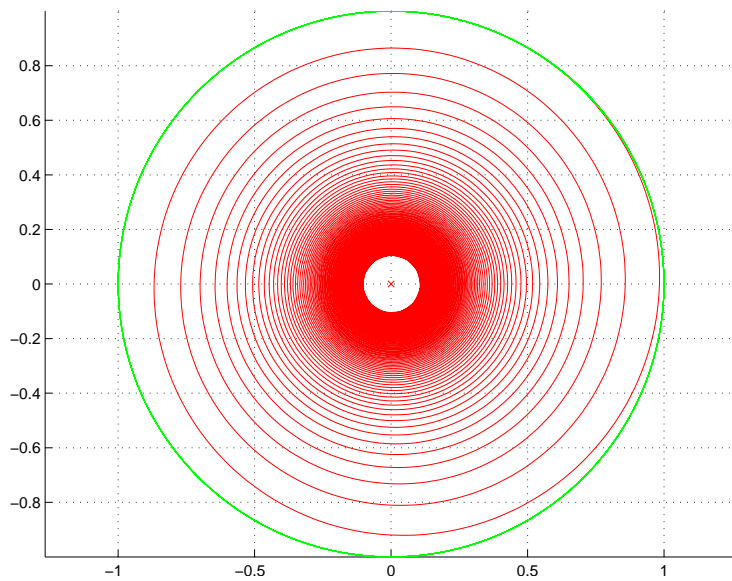


Figure 8: Earth- L_2 trajectory in the fixed frame, $\mu = 0$.

The numerical continuation method, considering μ as a small parameter, leads to deduce an extremal trajectory of the energy minimization Earth- L_2 transfer problem from one corresponding to the Kepler case, in accordance with Poincaré's work. The second order optimality condition check ensure that the computed extremals are locally energy minimizing in $L^\infty([0, t_f])$. We also note that in both cases $\mu = 0$ and $\mu = 1.2153e - 2$, the maximum value reached

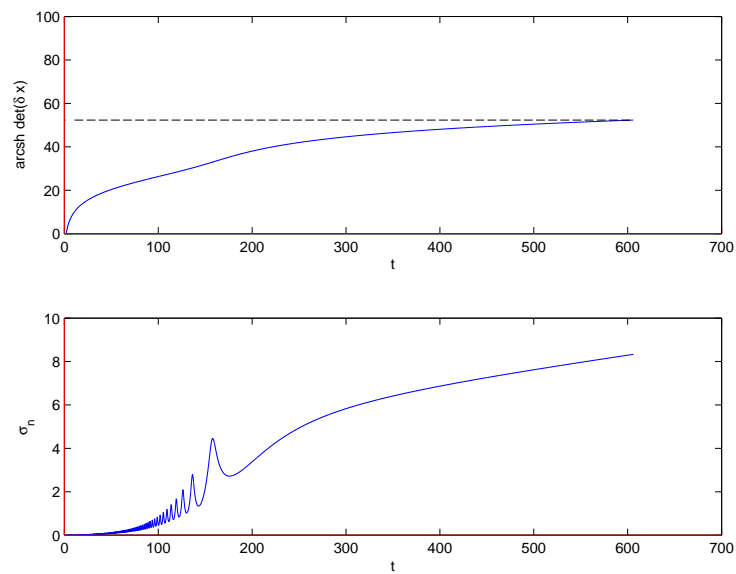


Figure 9: First conjugate time, Earth- L_2 transfer, $\mu = 0$.

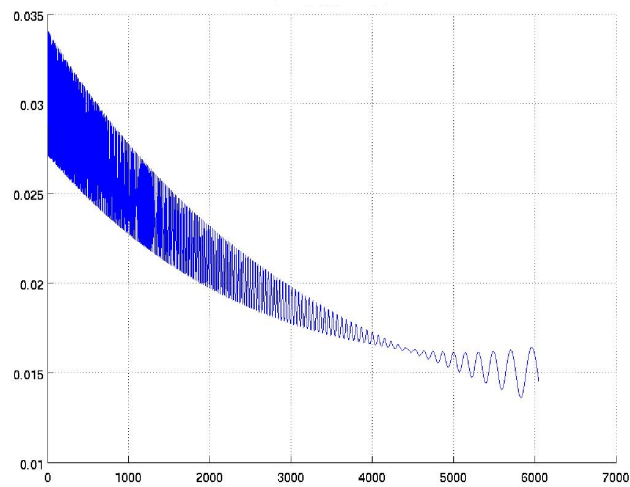


Figure 10: Norm of the extremal control, Earth- L_2 transfer, $\mu = 0$.

by the norm of the extremal control is inferior to the bound $|u| \leq 8e - 2$ of the SMART-1 electro-ionic engine ($7.3e - 2$ Newtons), while transfer times are comparable.

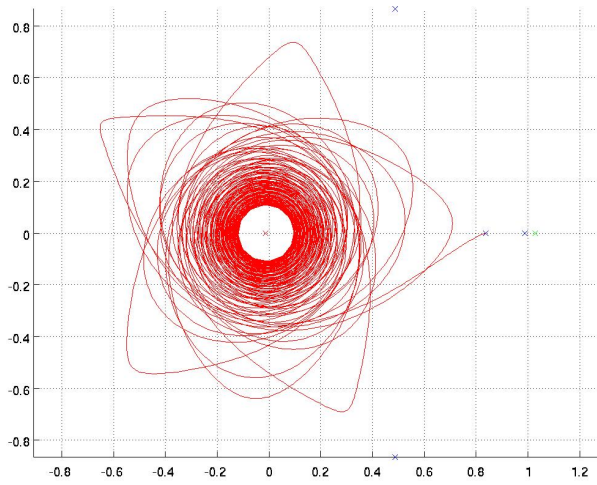


Figure 11: Earth- L_2 trajectory in the rotating frame, $\mu = 1.2153 - 2$.

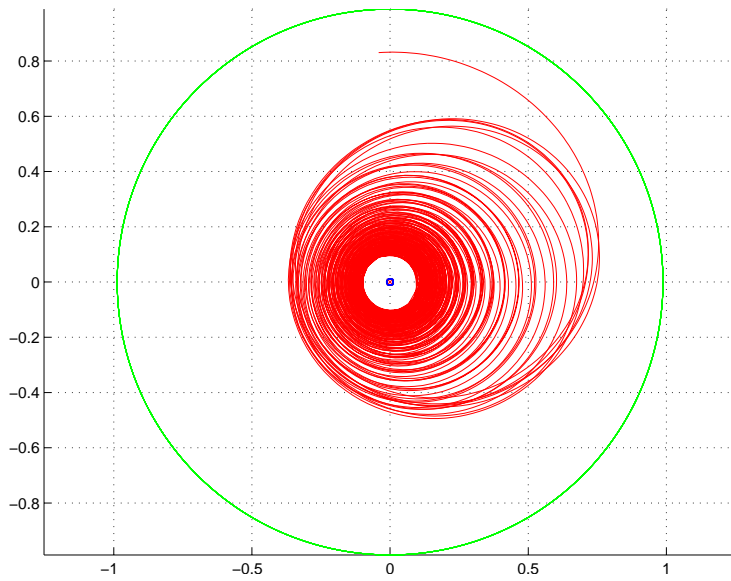


Figure 12: Earth- L_2 trajectory in the fixed frame, $\mu = 1.2153e - 2$.

4.4.3 Numerical continuation method for the Earth-Moon transfer

The second part of our trajectory analysis is devoted to the Earth-Moon transfer. We use the same dynamics and initial conditions as previously. In this case, the circular orbit around the Moon, denoted O_L and defined by

$$(x_1 - 1 + \mu)^2 + x_2^2 = 1.7e - 3, \quad x_3^2 + x_4^2 = 2.946e - 1, \quad (x_1 - 1 + \mu, x_2) \perp (x_3, x_4),$$

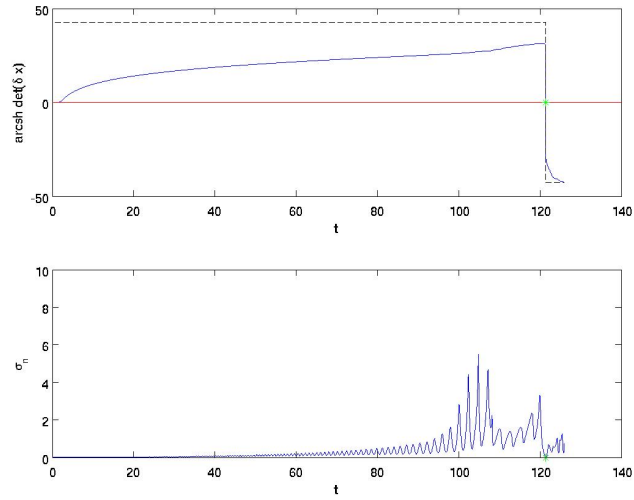


Figure 13: First conjugate time, Earth- L_2 transfer, $\mu = 1.2153e - 2$.

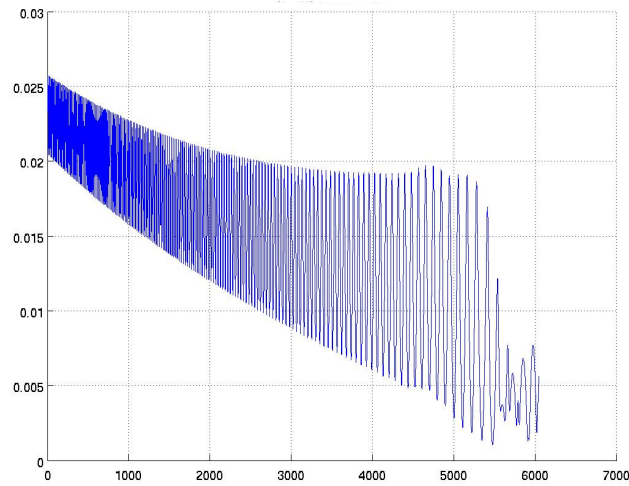


Figure 14: Norm of the extremal control, Earth- L_2 transfer, $\mu = 1.2153e - 2$.

is chosen as the target orbit. In addition to the former necessary conditions, the maximum principle provides the transversality condition $p(t_f) \perp T_{x(t_f)}O_L$. The shooting equation is modified accordingly, and one has to check local optimality computing focal instead of conjugate points.

The transfer time is fixed to 124 time units of the restricted 3-body problem. The extremal trajectory is obtained using the shooting method and initializing p_0 with the initial costate vector of the Earth- L_2 transfer. The Earth-Moon

trajectories in both rotating and fixed frames, the first focal time and the norm of the extremal control are presented from Fig. 15 to Fig. 22 for μ varying between 0 and $1.2153e-2$. In the two cases $\mu = 0$ and $\mu = 1.2153e-2$, the first focal time along extremals $t_{1,\text{foc}}$ is higher than $3t_f/2$, ensuring local optimality. The maximal bound of the norm of the extremal control is about $4.5e-2$ which approximately corresponds to the half of the maximal thrust allowed during SMART-1 mission.

It is interesting to notice that the Earth- L_2 Keplerian trajectory differs from the Earth-Moon Keplerian trajectory. The first phase of the Earth-Moon transfer matches the Earth- L_2 transfer. It underlines the crucial role of the neighbourhood of the point L_2 where the attractions of the two primaries compensate each other. By treating the first phase as a Keplerian transfer from the geostationary orbit (GEO) to a geostationary transfer orbit (GTO), we are able to use the averaging results of section 3.2 in order to estimate the maximal bound of the control associated with energy minimizing trajectories.

The first phase of the Earth-Moon trajectory with $\mu = 1.2153e-2$ can be approximated by a Keplerian transfer from the GEO to a GTO orbit with semi-major axis $a \simeq 6.11e-1$, eccentricity $e \simeq 4e-1$, and argument of pericenter $\theta = 6\pi/5$. Using the system of coordinates introduced in Proposition 3.9, one can compute the appropriate geodesic and estimate the final longitude required to achieve a prescribed maximal bound on the norm of the control thanks to Proposition 3.7.

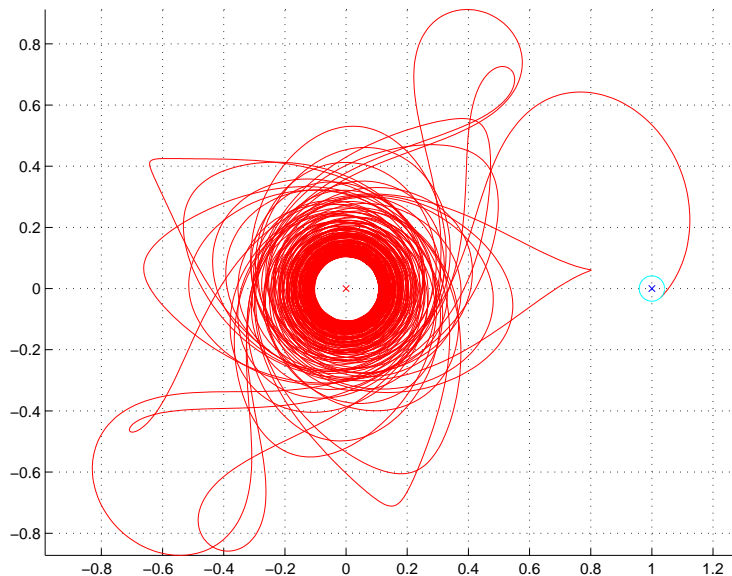


Figure 15: Earth-Moon trajectory in the rotating frame, $\mu = 0$.

References

- [1] Allgower, E. L.; Georg, K. *Numerical continuation methods, an introduction*. Springer, Berlin, 1990.

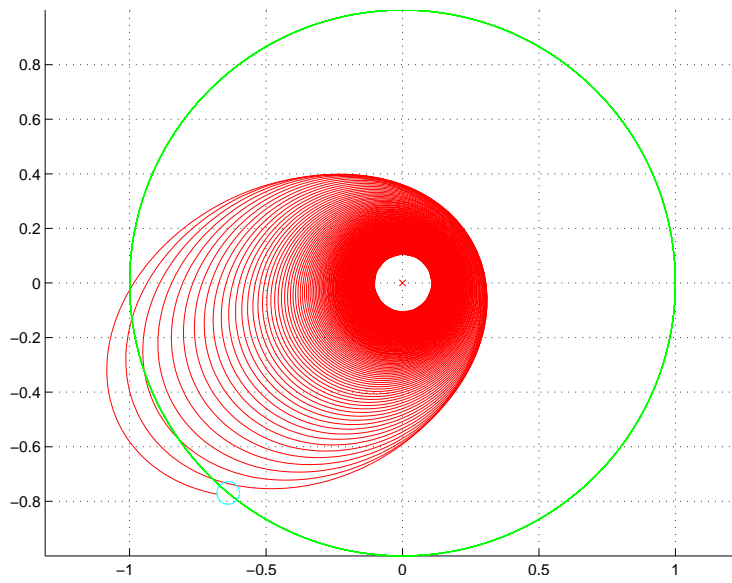


Figure 16: Earth-Moon trajectory in the fixed frame, $\mu = 0$.

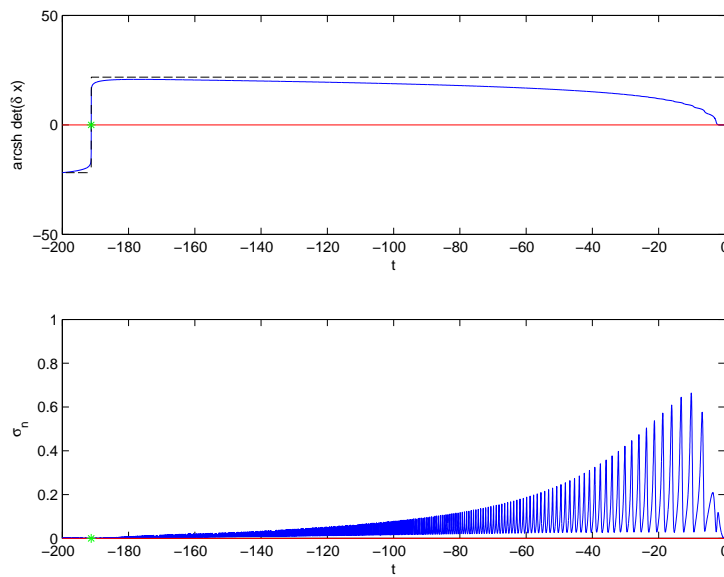


Figure 17: First focal time, Earth-Moon transfer, $\mu = 0$.

- [2] Arnold, V. I. *Mathematical methods of classical mechanics*. Springer, New-York, 1989.
- [3] Bellaïche, A. The tangent space in sub-Riemannian geometry. *Sub-Riemannian geometry*, 1–78, Progr. Math. **144**, Birkhäuser, 1996.

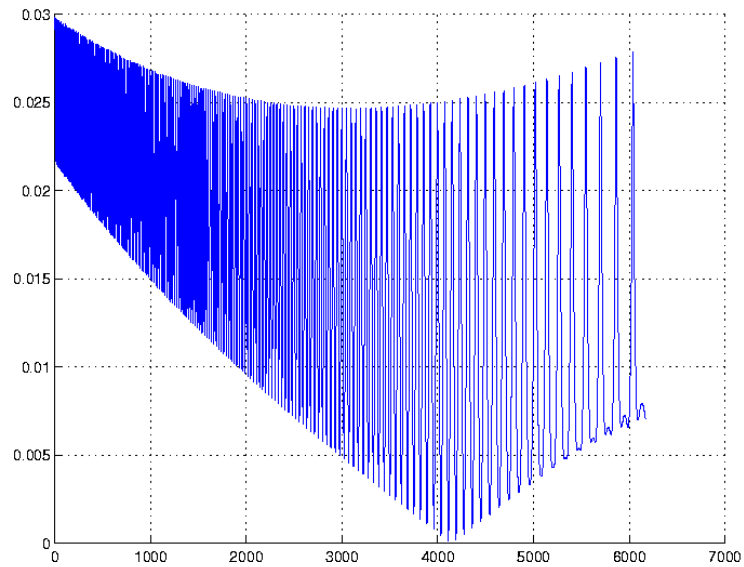


Figure 18: Norm of extremal control, Earth-Moon transfer, $\mu = 0$.

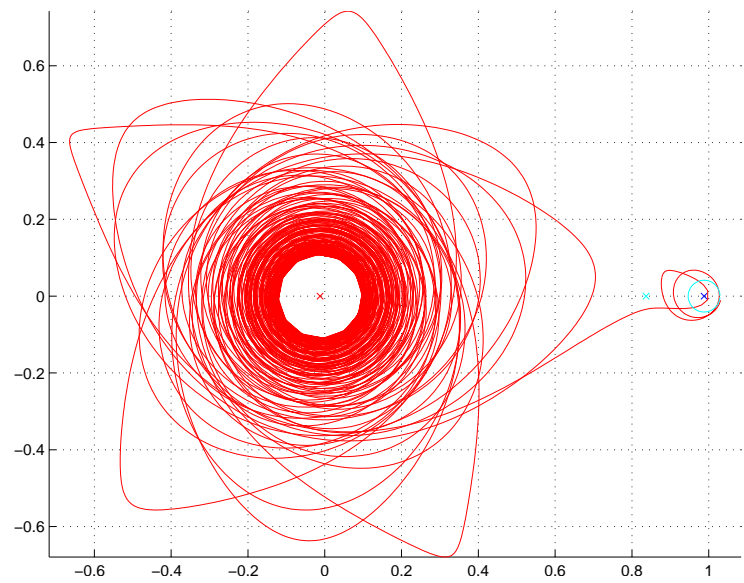


Figure 19: Earth-Moon trajectory in the rotating frame, $\mu = 1.2153e - 2$.

- [4] Bensoussan, A. Regular perturbations in optimal control. *Singular perturbations in systems and control* (Udine, 1982), 169–183, CISM Courses and Lectures, 280, Springer, Vienna, 1983.
- [5] Bliss, G. A. *Lectures on the Calculus of Variations*. Chicago, 1946.

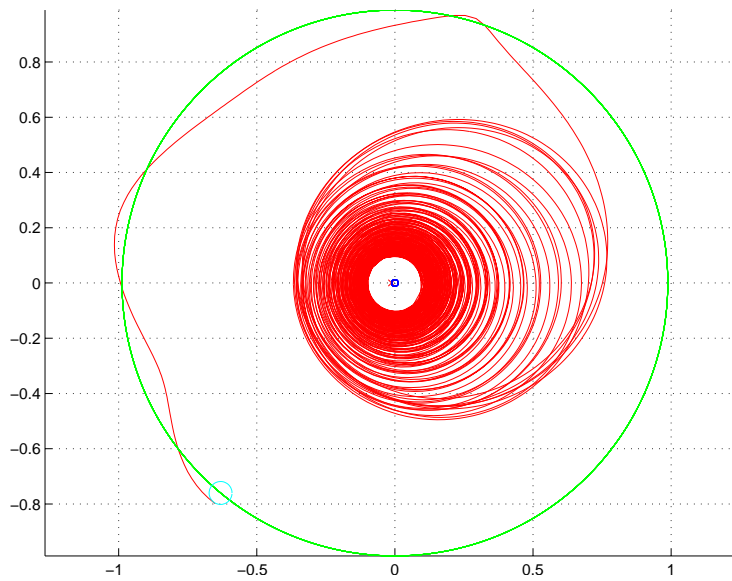


Figure 20: Earth-Moon trajectory in the fixed frame, $\mu = 1.2153e - 2$.

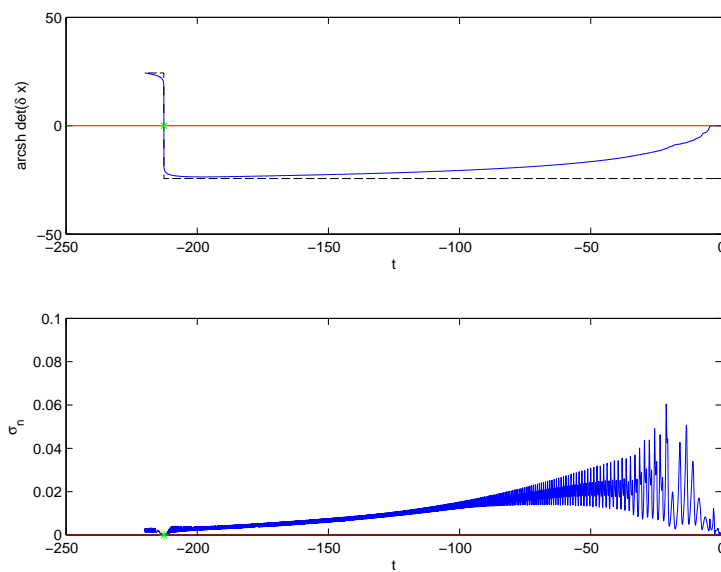


Figure 21: First focal time, Earth-Moon transfer, $\mu = 1.2153e - 2$.

- [6] Bombrun, A.; Chetboun, J.; Pomet, J.-B. Transfert Terre-Lune en poussée faible par contrôle feedback – La mission SMART-1. *INRIA Research report* (2006), no. 5955, 1–27.
- [7] Bonnard, B.; Caillau, J.-B. Riemannian metric of the averaged energy minimization problem in orbital transfer with low thrust. *Ann. Inst. H. Poincaré*

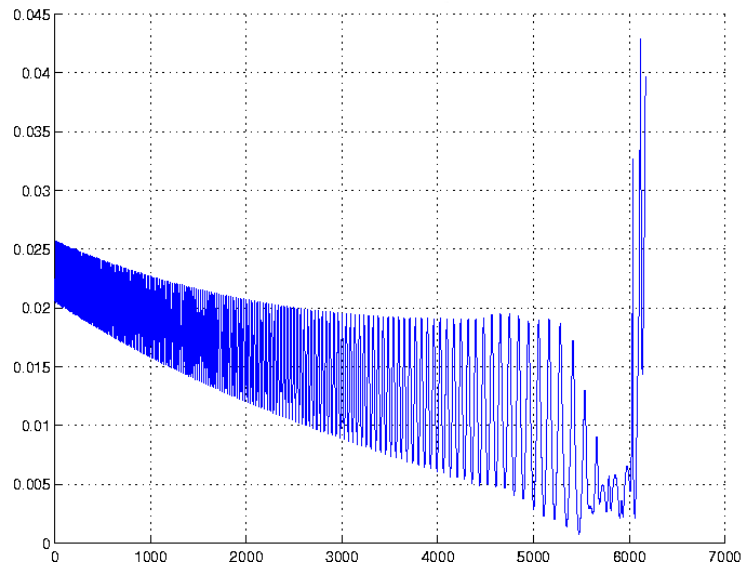


Figure 22: Norm of extremal control, Earth-Moon transfer, $\mu = 1.2153e - 2$.

- Anal. Non Linéaire* **24** (2007), no. 3, 395–411.
- [8] Bonnard, B.; Caillau, J.-B. Geodesic flow of the averaged controlled Kepler equation. *Forum math.* **21** (2009), no. 5, 797–814.
- [9] Bonnard, B.; Caillau, J.-B. Singular metrics on the two-sphere in space mechanics. *HAL preprint* (2008), no. 00319299, 1–25.
- [10] Bonnard, B.; Caillau, J.-B.; Dujol, R. Energy minimization of single-input orbit transfer by averaging and continuation. *Bull. Sci. Math.* **130** (2006), no. 8, 707–719.
- [11] Bonnard, B.; Caillau, J.-B.; Sinclair, R.; Tanaka, M. Conjugate and cut loci of a two-sphere of revolution with application to optimal control. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **26** (2009), no. 4, 1081–1098.
- [12] Bonnard, B.; Caillau, J.-B.; Trélat, E. Second order optimality conditions in the smooth case and applications in optimal control. *ESAIM Control Optim. and Calc. Var.* **13** (2007), no. 2, 207–236 (apo.enseeiht.fr/cotcot).
- [13] Bonnard, B.; Shcherbakova, N.; Sugny, D. The smooth continuation method in optimal control with an application to control systems. *ESAIM Control Optim. and Calc. Var.*, to appear.
- [14] Caillau, J.-B. *Contribution à l'étude du contrôle en temps minimal des transferts orbitaux*. Phd thesis, Toulouse Univ., 2000.
- [15] Caillau, J.-B.; Daoud, B.; Gergaud, J. On some Riemannian aspects of two and three-body controlled problems. *Recent Advances in Optimization and its Applications in Engineering*, Springer, to appear. Proceedings

of the 14th Belgian-French-German Conference on Optimization, Leuven, September 2009.

- [16] Chaplais, F. Averaging and deterministic optimal control. *SIAM J. Control Optim.* **25** (1987), no. 3, 767–780.
- [17] Do Carmo, M. P. *Riemannian geometry*. Birkhauser, Boston, 1992.
- [18] Edelbaum, T. N. Optimal low-thrust rendez-vous and station keeping. *AIAA J.* **2** (1964), no. 7, 1196–1201.
- [19] Geffroy, S. *Généralisation des techniques de moyennation en contrôle optimal. Application aux problèmes de transfert et rendez-vous orbitaux à poussée faible*. Phd thesis, Toulouse Univ., 1997.
- [20] Gergaud, J.; Haberkorn, T. Homotopy method for minimum consumption orbit transfer problem. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **12** (2006), no. 2, 294–310.
- [21] Guckenheimer, J.; Holmes, P. *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer, 1993.
- [22] Guerra, M.; Sarychev, A. Existence and Lipschitzian regularity for relaxed minimizers. *Mathematical control theory and finance*, 231–250, Springer, Berlin, 2008.
- [23] Kato, T. *Perturbation theory for linear operators*. Springer, 1980.
- [24] Marsden, J. E.; Ross, S. D. New methods in celestial mechanics and mission design, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **43** (2006), no. 1, 43–73.
- [25] Meyer, K.; Hall, G. R. *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem*. Springer, New York, 1992.
- [26] Poincaré, H. *Oeuvres*. Gauthier-Villars, Paris, 1934.
- [27] Pollard, H. *Mathematical introduction to celestial mechanics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966.
- [28] Pontryagin, L. S.; Boltyanskii, V. G.; Gamkrelidze, R. V.; Mishchenko, E. F. *The mathematical theory of optimal processes*. John Wiley & Sons, New York, 1962.
- [29] Racca, G.; Foing, B. H.; Coradini, M. SMART-1: The first time of Europe to the Moon. *Earth, Moon and planets* **85-86** (2001), 379–390.
- [30] Racca, G.; *et al.* SMART-1 mission description and development status. *Planetary and space science* **50** (2002), 1323–1337.
- [31] Sinclair, R.; Tanaka, M. The cut locus of a two-sphere of revolution and Toponogov’s comparison theorem. *Tohoku Math. J.* **59** (2007), no. 2, 379–399.
- [32] Szebehely, V. *Theory of orbits: The restricted problem of three bodies*. Academic Press, 1967.

Note complémentaire *

Trajectoires Terre-Lune à énergie minimale et technique de recollement

Gautier Picot

1 Introduction

L'étude numérique des transferts à énergie minimale entre l'orbite géostationnaire et l'orbite circulaire centrée sur la Lune, voir [1] a révélé une particularité intéressante des trajectoires obtenues. Dans un contexte de poussée faible où la norme du contrôle appliqué est borné par $4.5e - 2$, équivalent approximativement à une force de 0.35N , la dynamique du satellite semble se décomposer en 3 phases distinctes. La première est comparable à un transfert entre orbites keplériennes. Le satellite, soumis à l'influence prépondérante de la Terre, est transféré de l'orbite géostationnaire vers une orbite elliptique de demi-grand axe $a \simeq 6.11e - 1$, d'excentricité $e \simeq 0.4$ et d'argument du périégée $\theta \simeq 6\pi/5$. On remarque en outre que la valeur de l'argument du périégée paraît conservée le long du transfert. La technique de moyennation, présentée en détails dans [1, 2], est donc indiquée pour offrir une excellente approximation des trajectoires keplériennes optimales dont le calcul est grandement facilité par l'utilisation des coordonnées plates. Au cours de la deuxième phase, le satellite traverse un voisinage du point de Lagrange L_1 pour basculer de la zone d'attraction terrestre vers la zone d'attraction lunaire. La trajectoire optimale peut alors être approximée en résolvant explicitement le système de contrôle linéarisé au voisinage de L_1 . Le satellite rejoint ensuite l'orbite visée en un temps relativement court. Il est alors principalement soumis à l'attraction lunaire et cette portion de trajectoire peut une nouvelle fois être approchée au moyen de la technique de moyennation. Il est donc naturel de comparer cette trajectoire du problème des trois corps restreint avec la concaténation ou "recollement", de deux trajectoires énergie-minimales du problème de Kepler centré sur la Terre et la Lune et d'une trajectoire solution du problème de minimisation au voisinage de L_1 .

2 Première phase : transfert Keplerien dans le champ d'attraction terrestre

Comme cela a déjà été mentionné précédemment, l'objectif de la première phase du transfert est de transporter, en un temps t_f^1 et en minimisant la

*Cette note est un complément, non soumis à publication, à l'article *Geometric and numerical techniques in optimal orbital transfer using low propulsion* [1].

consommation énergétique, le satellite depuis l'orbite géostationnaire jusqu'à l'orbite elliptique autour de la Terre décrite par les éléments orbitaux $a = 6.11e - 1$, $e = 0.4$ et $\theta = 6\pi/5$. Au regard de la trajectoire à énergie minimale du problème des trois corps restreint calculée numériquement, il est important d'imposer que l'argument du périégée soit préservé le long du transfert. On se place dans le repère centré sur la Terre autour de laquelle on suppose, en accord avec la modélisation du problème des trois corps restreint, que la Lune et le point L_1 sont en rotation uniforme et effectuent une rotation complète en 2π unités de temps. La distance Terre-Lune est également normalisée à 1. On adopte une paramétrisation par la longitude cumulée $l \in [l_0, l_f^1]$ avec $l_0 = \pi/5$. On renormalise la variable rapide l en la variable lente $s = (l - l_0)/(l_f^1 - l_0) \in [0, 1]$. Puisque l'on veut organiser un rendez-vous avec le voisinage du point de Lagrange, il est nécessaire de vérifier expérimentalement que le temps de transfert correspondant à la longitude finale choisie approche une valeur de la forme $2k\pi + l_0$. La trajectoire extrémale solution du système Hamiltonien renormalisé issu de l'application du principe du maximum converge alors uniformément vers la solution du système Hamiltonien moyenné satisfaisant les conditions limites imposées. L'argument du périégée étant fixé le long du transfert, cette solution est une droite dans le système de coordonnées plates. On déduit de la trajectoire moyennée la valeur du contrôle optimal du problème de transfert original, calculé en la variable rapide l , dont la norme est de l'ordre de $1/(l_f^1 - l_0)$ si l_f^1 est suffisamment grand. En injectant ce contrôle au sein de système contrôlé étudié puis en procédant à une intégration numérique, on obtient une approximation de la trajectoire de Kepler recherchée, reliant l'orbite géostationnaire au voisinage du point de Lagrange L_1 .

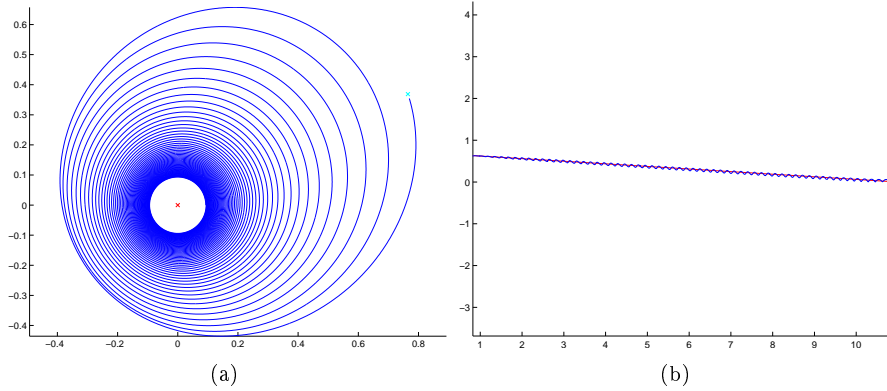


FIGURE 1 – Approximation de la première partie du transfert. (a) La trajectoire keplerienne approximée grâce à la technique de moyennation, représentée dans le repère centré sur la Terre. En turquoise, la position du point L_1 à la fin du transfert. (b) Comparaison de la trajectoire moyennée (en rouge) et de la trajectoire keplerienne calculée (en bleue), toutes deux représentée dans le système de coordonnées plates.

3 Deuxième phase : Transfert au voisinage de L_1

L'objectif de la deuxième phase du transfert consiste à transporter le satellite de la zone d'attraction terrestre à la zone d'attraction lunaire en utilisant la dynamique contrôlée au voisinage du point d'équilibre L_1 . On se place dans les coordonnées du problème restreint des trois corps plan centré en L_1 . Rappelons qu'en posant $q = (x, y, \dot{x}, \dot{y})$, l'équation linéarisée de la dynamique contrôlée des trois corps plan au voisinage du point L_1 s'écrit

$$\dot{q} = Aq + Bu \quad (1)$$

où les matrices A et B sont données par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 11.29391 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4.14696 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La condition initiale dans l'espace des phases est fixée grâce à la condition finale de la première partie du transfert. On choisit de viser le point $q_f = (0.0039, 0, 0, -0.5509)$. Trois raisons justifient ce choix. Tout d'abord, ce point est situé dans un voisinage suffisamment proche de L_1 pour que l'équation linéarisée décrive précisément le mouvement entre les conditions initiales et finales. De plus, la vitesse y est relativement faible, de sorte que le contrôle nécessaire pour l'atteindre puisse être réduit. Enfin, on pourra ainsi considérer la dernière partie du transfert comme une trajectoire keplerienne joignant une orbite elliptique de paramètre $a = 0.105$, $e = 0.4$, $\theta = 0$ dont l'un des foyers est la Lune vers l'orbite circulaire centrée sur la Lune. On peut considérer $t_0 = 0$. On choisit un temps de transfert $t_f^2 = 1$. Ce temps de transfert est légèrement supérieur au temps que la trajectoire optimale de référence passe au voisinage de L_1 , mais permet de diminuer la borne de la norme du contrôle. Puisque l'on s'intéresse au problème de minimisation de l'énergie, on applique le principe du maximum dans le cas linéaire quadratique, voir [3], qui affirme que le contrôle optimal est donné par

$$u^*(t) = B^T p^*(t)$$

ou le couple (q^*, p^*) est solution du système

$$\begin{aligned} \dot{q} &= Aq + BB^T p \\ \dot{p} &= -A^T p. \end{aligned} \quad (2)$$

L'état adjoint p^* est donné par $p^* = \exp^{-At} p_0^*$ et la condition initiale p_0 est déterminée, d'après la formule de variation de la constante, par

$$p_0^* = \left[\int_0^{0.5} \exp^{-As} BB^T \exp^{-A^T s} ds \right]^{-1} (\exp^{-A^T t_f^2} q_f - q_0).$$

On dispose ainsi de la condition initiale (x_0^*, p_0^*) qui permet d'intégrer numériquement le système 2 et d'obtenir, en projetant sur l'espace des phases, la seconde partie de la trajectoire recherchée.

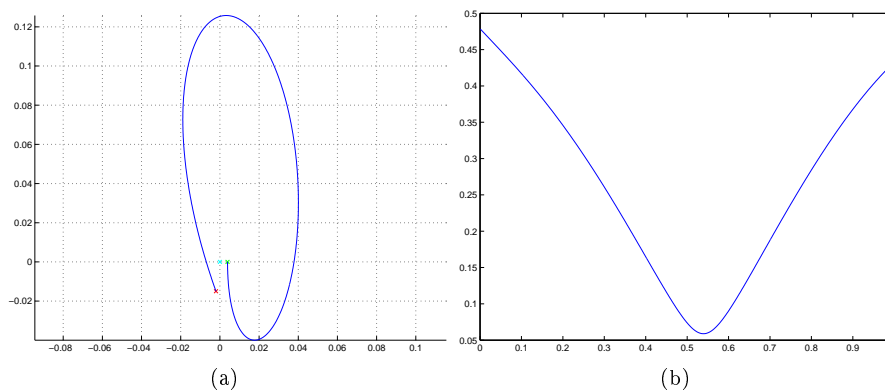


FIGURE 2 – Approximation de la seconde partie du transfert. (a) La trajectoire du système de contrôle linéarisé au voisinage de L_1 , représentée dans le repère en rotation centré en L_1 . (b) Norme du contrôle le long du transfert.

4 Troisième phase : transfert Keplerien dans le champ d'attraction lunaire.

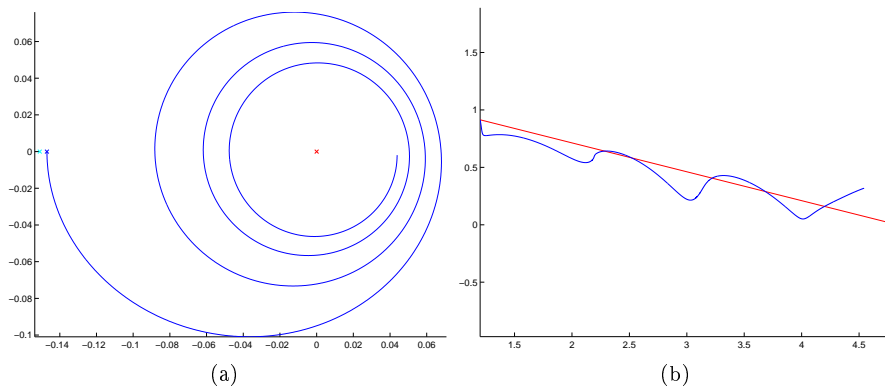


FIGURE 3 – Approximation de la troisième partie du transfert. (a) La trajectoire keplerienne approximée grâce à la technique de moyennation, toutes deux représentées dans le repère centré sur la Lune. En turquoise, la position du point L_1 au début du transfert. (b) Comparaison de la trajectoire moyennée (en rouge) et de la trajectoire keplerienne calculée (en bleue), représentée dans le système de coordonnées plates.

La troisième phase du transfert est dédiée à rejoindre l'orbite circulaire centrée sur la Lune depuis l'orbite elliptique admettant la Lune pour foyer et les paramètres $a = 0.105$, $e = 0.4$, $\theta = 0$. Puisque l'orbite visée est circulaire, la technique de moyennation et l'utilisation des coordonnées plates sont à nouveau appropriées pour approximer la trajectoire de Kepler à énergie minimale entre les orbites imposées en chaque extrémités. On reproduit donc exactement la

même méthode que celle employée pour calculer la trajectoire keplerienne de la première phase du transfert. Au vu de la trajectoire de référence, il n'est pas nécessaire d'imposer une très grande longitude finale pour réduire significativement la norme du contrôle. On se contente d'imposer trois révolutions au satellite autour de la Lune pour rejoindre la cible. On s'assure ainsi d'obtenir une majoration de la norme du contrôle de l'ordre de $1e - 1$.

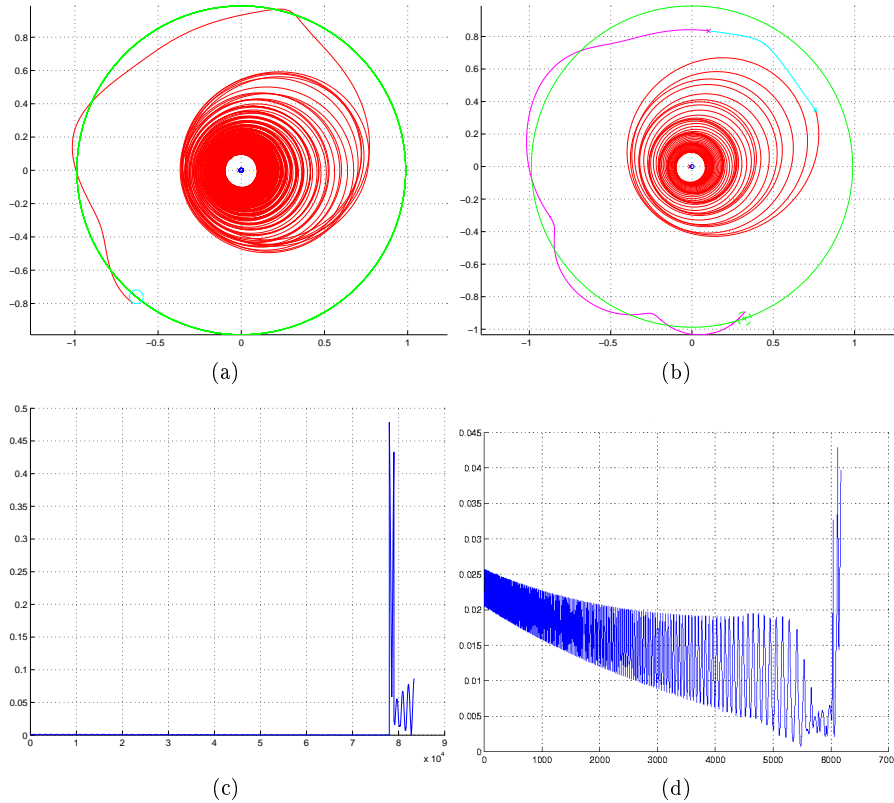


FIGURE 4 – Comparaison entre une trajectoire Terre-Lune à énergie minimale du problème restreint des trois corps plan calculée numériquement et un recollement de trajectoires à énergie minimale du problème à deux corps. La figure (a) représente, dans le repère fixe des trois corps restreints, la trajectoire calculée au moyen d'une méthode de tir dont la condition initiale est obtenue par une homotopie sur la masse réduite μ . La figure (b) représente, dans le même repère, un recollement de trajectoires à énergie minimale approchées des problèmes de Kepler dont les centres des champs de gravité sont la Terre (en rouge) et la Lune (en violet). Ces approximations sont calculées grâce à la technique de moyennation. Leur jonction s'opère en utilisant une trajectoire optimale du système linéarisé au voisinage du point de Lagrange L_1 (en turquoise). Les figures (c) et (d) représentent les normes des contrôles associées respectivement aux trajectoires réelles et recollées.

5 Conclusion

La méthode de recollement de trajectoires que nous présentons permet, grâce à des méthodes purement analytiques, la conception d'une approximation de trajectoire à énergie minimale du problème des trois corps restreint. Les similitudes physiques des trajectoires obtenues numériquement au moyen de la méthode de tir et par recollement, voir Fig. 4, attestent de la pertinence de cette technique pour l'étude de la dynamique contrôlée du problème restreint des trois corps. Les coordonnées plates s'avèrent être un outil particulièrement efficace et élégant pour approximer les première et troisième phases d'une telle trajectoires, lorsque l'influence d'une des deux primaires est prépondérante. On peut en outre, en choisissant une longitude finale suffisamment élevée, fixer l'ordre de grandeur du contrôle appliqué de manière à imposer une poussée aussi faible que désirée. La norme du contrôle optimal le long de la deuxième phase du transfert, calculée en résolvant le système contrôlé des trois corps plan linéarisé au voisinage de point L_1 , est cependant significativement plus élevée que celle du contrôle calculé par la méthode de tir, lors du passage entre les zones d'influence de la Terre et de la Lune. Cette remarque illustre les limites de cette étude, qui fait figure d'introduction à de nombreuses perspectives de travail et doit être notamment poursuivie par une étude de l'optimalité globale des trajectoires obtenues par recollement. L'utilisation du principe du maximum avec contraintes semble un outil approprié pour traiter cette question. Les conditions géométriques assurant la continuité de l'état adjoint le long du transfert sont également à étudier.

Références

- [1] B. Bonnard, J.B. Caillau and G. Picot *Geometric and numerical techniques in optimal control of the two and three body problems*, Commun. Inf. Syst, **10** (2010), to appear.
- [2] Geffroy, S. *Généralisation des techniques de moyennation en contrôle optimal. Application aux problèmes de transfert et rendez-vous orbitaux à poussée faible*. Phd thesis, Toulouse Univ., 1997.
- [3] E.B. Lee and L. Markus. *Fondations of optimal control theory* Reprint edition, Krieger, 1986.

Shooting and numerical continuation methods for computing time-minimal and energy-minimal trajectories in Earth-Moon transfer using low propulsion.

G. Picot*

Abstract. In this article we describe the principle of computations of optimal transfers between quasi-Keplerian orbits in the Earth-Moon system using low-propulsion. The spacecraft's motion is modelled by the equations of the control restricted 3-body problem and we base our work on previous studies concerning the orbit transfer in the two-body problem where geometric and numeric methods were developed to compute optimal solutions. Using numerical simple shooting and continuation methods connected with fundamental results from control theory, as the Pontryagin Maximum Principle and the second order optimality conditions related to the concept of conjugate points, we compute time-minimal and energy-minimal trajectories between the geostationary initial orbit and a final circular one around the Moon, passing through the neighborhood of the libration point L_1 . Our computations give simple trajectories, obtained by referring to numerical values of the SMART-1 mission.

Key Words. Geometric control theory, numerical analysis method, 3-body problem, Earth-Moon transfer, time minimization problem, energy minimization problem.

AMS subject classification. 49K15, 49M05, 70F07.

1 Introduction

The aim of this article is to study the optimal orbit transfer between quasi-Keplerian orbits in the Earth-Moon system when low propulsion is applied. This study is in particular motivated by the recent mission SMART-1 of the European Space Agency, see [26, 27], which has already been investigated in depth, using for example simple feedback laws [7] or the transcription method [4]. Our model is the circular restricted 3-body problem [24] that has provided the framework to numerous dynamical systems studies about space mission design in the solar system, see notably [19, 21]. The physical issue is to maximize

*Mathematics Institute, Bourgogne University, 9 avenue Savary, F-21078 Dijon (gautier.picot@u-bourgogne.fr), supported by CNRS (contract no. 37244) and Conseil Régional de Bourgogne (contrat no. 079201PP02454515)

the final mass of the spacecraft but, as a first step, we restrict our analysis to the time-minimal control problem and the so-called energy minimization problem, see also [13, 16, 17] for complementary results, for two reasons. First of all, the first problem will provide an estimate about the time transfer. Second, the energy minimization problem is a L^2 -regularization of the mass maximization problem which is a non smooth L^1 -problem. This regularization is known to be an important step in the analysis, see [18]. Our work is based on previous works concerning the orbit transfer between Keplerian orbit in the two-body problem with low propulsion, see [15, 18], where geometric and numeric techniques were developed to compute the optimal solutions. They are based on the so-called indirect method in optimal control where optimal solutions are found among a set of extremal curves, solutions of the Pontryagin's Maximum Principle [25]. This led to compute the solution using a shooting method where the solution is computed using a Newton method. In this framework, a continuation method is used to solve the delicate problem of finding a precise enough initial solution, see [2].

The first section of this article presents the main results from geometric control theory connected to our analysis with adapted numerical codes developed to compute the solutions. First of all, the maximum principle is only a necessary optimality condition. In order to get necessary sufficient optimality conditions (under generic assumptions) one must define the concept of conjugate point, which was already introduced in the standard literature of calculus of variations [6] and can be generalized in optimal control, see for instance [1, 12]. If the Hamiltonian optimal dynamics is described by a smooth Hamiltonian vector field \vec{H} , conjugate points are the image of the singularities of the exponential mapping $\exp_{q(0)} : p(0) \rightarrow \Pi_q(\exp_{t_f}(\vec{H})(q(0), p(0)))$ where $\Pi_q : (q, p) \rightarrow q$ is the standard projection. Such a point can be numerically computed using the Cotcot code described in [8]. Besides, an important remark, in view of the use of the (smooth) continuation method in optimal control, is to observe that the shooting equation is precisely to find $p(0)$ such that $\exp_{q(0)}(p(0)) = q_1$ where q_1 is the terminal condition and the derivative can be generated using the variational equation of \vec{H} . This will lead to convergence results for the smooth continuation method in optimal control, related to estimates of conjugate points [14].

The second section is devoted to present the system which is deduced from the standard circular restricted model where the two primaries are fixed in a rotating frame, see [24, 22, 30]. Up to a normalization the system can be written in the Hamiltonian form

$$\dot{z} = \vec{H}_0(z) + u_1 \vec{H}_1(z) + u_2 \vec{H}_2(z)$$

where $z = (q, p) \in \mathbb{R}^4$ and \vec{H}_0 is the Hamiltonian vector field corresponding to the the drift

$$H_0(z) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + p_1 q_2 - p_2 q_1 - \frac{1 - \mu}{\varrho_1} - \frac{\mu}{\varrho_2},$$

q being the position of the spacecraft, ϱ_1 representing the distance to the Earth with mass $1 - \mu$ located at $(-\mu, 0)$ and ϱ_2 the distance to the Moon with mass μ and located at $(1 - \mu, 0)$, while $\mu \simeq 0.012153$ is a small parameter. The

Hamiltonian lifts associated with the control correspond to the functions

$$H_i(z) = -q_i, \text{ for } i = 1, 2$$

and $\|u\|$ is bounded by ϵ .

The third section deals with the time-minimal Earth-Moon transfer problem. In that case, the norm of an extremal control is constant outside a set of measure zero, see [9]. A preliminary study will focus on the Earth- L_1 transfer, which provides an approximation of the first phase of the Earth-Moon transfer. Using our geometric analysis, a locally minimizing extremal is numerically computed using a continuation method on the control bound ϵ . Actually, the convergence of the simple shooting method is easily obtained with large thrust, the transfer time being short, and provides a starting point to the continuation method, see [11]. This first study naturally leads to the analysis of time-minimal Earth-Moon trajectories. In addition, we propose a time-minimal transfer strategy towards the Lagrange point L_4 , in order to compare, from the topological point of view, extremal trajectories associated with different targets. Finally, we proceed to a numerical verification of the relation of comparison between the first conjugate times in the normal and abnormal cases, see [12].

The fourth section is devoted to the energy minimization of the Earth-Moon transfer. The parameter μ is small and this remark was used by Poincaré to study the dynamics of the free motion described by \vec{H}_0 , by making a deformation of the case $\mu = 0$ which corresponds to Kepler problem in rotating coordinates, see [23]. Inspired by this approach we propose a simple solution to the energy-minimal Earth-Moon transfer using low propulsion, after having investigated the Earth- L_1 transfer case.

2 Numerical methods in optimal control.

2.1 Optimal control problem

Let M and U be two smooth manifolds of respective dimensions n and m . Consider the control system

$$\dot{q}(t) = f(q(t), u(t)) \tag{1}$$

where $f : M \times U \rightarrow TM$ is smooth and u is a bounded measurable function defined on $[0, t(u)[\subset \mathbb{R}^+$ and valued in U . Let M_0 and M_1 be two subsets of M .

Definition 2.1. Let be $q_0 \in M$. One calls *trajectory associated with the control u* the solution $q(t, q_0, u)$ of (1) starting from q_0 at $t = 0$. For the sake of simplicity, such a trajectory can be denoted $q(t)$. A control u is called an *admissible control on $[0, t_f]$* , with $t_f < t(u)$, if its associated trajectory satisfies $q_0 \in M_0$ and $q(t_f) \in M_1$. One denotes by \mathcal{U}_{t_f} the set of these admissible controls and defines the *cost* of q by

$$C(t_f, u) = \int_0^{t_f} f^0(q(t), u(t)) dt \tag{2}$$

where $f^0 : M \times U \rightarrow \mathbb{R}$ is smooth.

Solving the optimal control problem consists in determining an admissible control u such that C is minimized.

Definition 2.2. Let be $q_0 \in M$ and $t_f > 0$. The *end-point mapping* is defined by

$$\begin{aligned} E_{q_0, t_f} : \mathcal{U}_{t_f} &\longrightarrow M \\ u &\longrightarrow q(q_0, t_f, u). \end{aligned} \quad (3)$$

If \mathcal{U}_{t_f} is endowed with the L^∞ topology then the end-point mapping is smooth. Let us remark that, for every $\epsilon > 0$, an admissible control u can be smoothly extended to $[0, t_f + \epsilon]$, provided the control is left continuous at t_f .

Definition 2.3. Consider two distinct cases.

- If the final time is fixed, q is said to be *locally optimal* in L^∞ topology if it is optimal in a neighborhood of u in L^∞ topology.
- If the final time is not fixed and the control is left continuous at t_f , $q(\cdot)$ is said to be *locally optimal* in L^∞ topology if for each neighborhood V of u in $L^\infty([0, t_f + \epsilon], U)$, for each η such that $|\eta| \leq \epsilon$ and for each control $v \in V$ which satisfies $E(q_0, t_f + \eta, v) = E(q_0, t_f, u)$ then $C(t_f + \eta, v) \geq C(t_f, u)$.

2.2 The Pontryagin's Maximum Principle

Consider the control system (1) and the cost (2). The Pontryagin's Maximum Principle [25] asserts that if the control $u \in \mathcal{U}_{t_f}$ is optimal then there exists p^0 a nonpositive real and p an absolutely continuous mapping on $[0, t_f]$ such that $p(t) \in T_{q(t)}^*M$, $(p^0, p) \neq (0, 0)$ and, almost everywhere on $[0, t_f]$, there holds

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p, p^0, u), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p, p^0, u), \quad (4)$$

where H is defined by

$$\begin{aligned} H : T^*M \times \mathbb{R}_-^* \times U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (q, p, p^0, u) &\longrightarrow p^0 f^0(q, u) + \langle p, f(q, u) \rangle. \end{aligned}$$

Moreover, the optimal control satisfies the maximization condition

$$H(q(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in U} H(q(t), p(t), p^0, v) \quad (5)$$

almost everywhere on $[0, t_f]$. If t_f is not fixed, there holds

$$\max_{v \in U} H(q(t), p(t), p^0, v) = 0$$

for every $t \in [0, t_f]$. Finally, if M_0 (resp. M_1) is a regular submanifold of M , the transversality condition is satisfied

$$p(0) \perp T_{q(0)}M_0 \quad (\text{resp.} \quad p(t_f) \perp T_{q(t_f)}M_1).$$

Definition 2.4. One calls *pseudo-Hamiltonian* the mapping H and *costate* the function p . A solution (q, p, p^0, u) of equations (4) and (5) is called an extremal. If $p^0 = 0$, an extremal is said to be *abnormal*. Otherwise it is said to be *normal*.

Since the domain U is a manifold, restricting to a chart we may assume that, locally, $U = \mathbb{R}^m$ and the maximization condition leads to $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$. Express the following assumption.

(L) (Strong Legendre condition) The quadratic form $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}$ is negative definite along the reference extremal.

From the implicit function theorem, one deduces that extremal controls are smooth functions $u_r(t) = u_r(q(t), p(t))$ in a neighborhood of u .

Definition 2.5. One defines the *true Hamiltonian*, denoted H_r , by

$$H_r(q, p) = H(q, p, u_r(q, p)).$$

Then any extremal is solution of the Hamiltonian system

$$\dot{q} = \frac{\partial H_r}{\partial p}(q, p), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H_r}{\partial q}(q, p). \quad (6)$$

Denoting $z = (q, p)$, this system writes

$$\dot{z} = \overrightarrow{H}_r(z(t)). \quad (7)$$

2.3 Second order optimality condition

Let us briefly present the concept of geometric conjugate time which is related to a second order optimality condition, see [8] for the details. Consider a smooth manifold M of dimension n and denote $\Pi_q : T^*M \rightarrow M$ the standard projection from the cotangent bundle T^*M on M . Let \overrightarrow{H} be an Hamiltonian vector field on T^*M and $z(t) = (q(t), p(t))$ a trajectory of \overrightarrow{H} defined on $[0, t_f]$ so that there holds $\dot{z}(t) = \overrightarrow{H}(z(t))$ for each $t \in [0, t_f]$.

Definition 2.6. The variational equation on $[0, t_f]$

$$\delta \dot{z}(t) = d\overrightarrow{H}(z(t)).\delta z(t) \quad (8)$$

is called the *Jacobi equation* along $z(\cdot)$. One calls a *Jacobi field* a nontrivial solution $J(t)$ of the Jacobi equation along $z(\cdot)$ and it is said to be *vertical* at the time t if $d\Pi_q(z(t)).J(t) = 0$. A time t_c is said to be *geometrically conjugate* if there exists a Jacobi field vertical at 0 and t_c . In which case, $q(t_c)$ is said to be *conjugate* to $q(0)$.

Let us point out that, in local coordinates, one can write a Jacobi field $J(t) = (\delta q(t), \delta p(t))$. Then J is vertical at the time t whenever $\delta q(t) = 0$. When the final target is a regular submanifold $M_1 \subset M$, the notion of conjugate time is generalized as follows.

Definition 2.7. Denote $M_1^\perp = \{(q, p), q \in M_1, p \perp T_q M_1\}$. Then a time $t_{\text{foc}} \in [0, T]$ is said to be a *focal time* if there exists a Jacobi field $J = (\delta q, \delta p)$ such that $\delta q(t_{\text{foc}}) = 0$ and $J(t_{\text{foc}})$ is tangent to M_1^\perp .

Definition 2.8. Let be $z_0 \in T^*M$. For each $t \in [0, t_f]$, one defines the *exponential mapping* by

$$\exp_t : z_0 \rightarrow \Pi_q(z(t, z_0))$$

where $z(t, z_0)$ is the trajectory of \overrightarrow{H} satisfying $z(0, z_0) = z_0$.

Using local coordinates and setting $z_0 = (q_0, p_0) \in T^*M$, one can write $z(t, q_0, p_0) = (q(t, q_0, p_0), p(t, q_0, p_0))$. Setting $q_0 \in M$ as the initial condition, the exponential mapping writes $\exp_{q_0, t}(p_0) = q(t, q_0, p_0)$. Let $\exp_t(\vec{H})$ be the flow of \vec{H} . The following proposition results from a geometrical interpretation of the Jacobi equation.

Proposition 2.1. *Let be $q_0 \in M$, $L_0 = T_{q_0}^*M$ and $L_t = \exp_t(\vec{H})(L_0)$. Then L_t is a Lagrangian submanifold of T^*M whose tangent space is spanned by Jacobi fields starting from L_0 . Moreover $q(t_c)$ is geometrically conjugate to q_0 if and only if \exp_{q_0, t_c} is not an immersion at p_0 .*

The following proposition, see [10], will be used to formulate the relevant generic assumptions.

Proposition 2.2. *An extremal control is a singularity of the end-point mapping when the set of admissible controls \mathcal{U} is endowed with the L^∞ -topology. Moreover, the adjoint vector $p(t)$ is orthogonal to the image of $D_u E_{q_0, t}$.*

The following assumptions is needed to derive second order optimality conditions in the normal case.

(S) (Strong regularity) On every subinterval of $[0, t_f]$, the control u is of corank 1.

As a result, one can enunciate the following crucial theorem which connects the notion of conjugate time and the local optimality of extremals, see [1, 12, 28].

Theorem 2.1. *Let t_c^1 be the first conjugate time along z . Under previous assumptions, the trajectory $q(\cdot)$ is locally optimal on $[0, t_c^1]$ in L^∞ topology; if $t > t_c^1$ then $q(\cdot)$ is not locally optimal on $[0, t]$.*

2.4 Simple shooting method

We previously stated that the maximization and strong Legendre conditions enable to write locally any extremal control as $u_r(t) = u_r(q(t), p(t))$, the extremal system becoming $\dot{z} = \vec{H}_r(z(t))$ where $z = (q, p)$. Expressing boundary and transversality conditions by $R(z(0), z(t_f)) = 0$, the boundary values problem becomes

$$\begin{cases} \dot{z} = \vec{H}_r(z(t)) \\ R(z(0), z(t_f)) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

The initial condition q_0 is fixed which leads to the following definition.

Definition 2.9. Assume that the transfer time t_f is fixed. One calls *shooting function* the mapping E defined by

$$E : p_0 \longrightarrow R(z_0, z_{t_f}).$$

It is important to notice that whenever one considers an optimal control problem with a non-fixed transfer time, the corresponding shooting function applies on (t_f, p_0) . Moreover, the condition $H_r = 0$ from the maximum principle provides one additional equation.

Hence solving the boundary values system is equivalent to finding a zero of E , that is to say solving the so-called *shooting equation*. Since $u_r(q, p)$ is smooth,

E is smooth and such a zero can be found using a Newton type algorithm, providing that one has a precise initial guess of it. The continuation method is appropriate to overcome this difficulty.

2.5 Smooth continuation method

Without loss of generality, one can assume that the final time t_f is fixed and the final condition is written $q_f = q_1$, the following results being adaptable to other cases. The smooth continuation method consists in considering the reduced Hamiltonian H_r as the element H_1 of a family $(H_\lambda)_{\lambda \in [0,1]}$ of smooth Hamiltonians. One thus builds up a one-parameter family of shooting functions

$$E_\lambda(p_0) = \exp_{q_0, t_f}^\lambda(p_0) - q_1$$

Considering the normal case, the following theorem is deduced from the implicit function theorem, see [14].

Theorem 2.2. *For each λ the exponential mapping $\exp_{q_0}^\lambda$ is of maximal rank if and only if the point $q_1 = \exp_{q_0, t_f}^\lambda(p(0))$ is non-conjugate to q_0 . Moreover, solutions of the parametrized shooting equation contain a smooth curve, which can be parametrized by λ and the derivative E'_λ can be computed integrating the Jacobi equation.*

For more details, in particular about geometric considerations relative to this theorem, one can refer to [20]. The scheme of the smooth continuation method to compute solutions of the shooting equation is the following :

1. One determines the starting point p_0 of the continuation method using a simple shooting. Setting $\lambda = 0$, one computes the extremal $z(t)$ on $[0, t_f]$ starting from (q_0, p_0) .
2. One chooses a discretization $0 = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N = 1$ such that the shooting function is solved iteratively at λ_{i+1} from λ_i .
3. One builds up the finite sequence p_0, \dots, p_N with zeros of shooting functions $E_{\lambda_0}, \dots, E_{\lambda_N}$.

From theorem 2.2, a crucial point to guarantee the convergence of the smooth continuation method is to check the lack of conjugate points along each extremal z_λ on $[0, t_f]$, which must be iteratively performed.

2.6 Numeric methods

They are implemented in the COTCOT (Conditions of Order Two, COnjugate Times) whose aim is to provide the numerical tool :

- to integrate the smooth Hamiltonian vector field $\overrightarrow{H_n}$,
- to solve the associated shooting equation,
- to compute the corresponding Jacobi fields along the extremals,
- to evaluate the resulting conjugate points.

The code is written in Fortran language, while automatic differentiation provided by the software *Adifor* [5] is used to generate the Hamiltonian differential equation and the variational one. For the users the language is Matlab, see [9] for a precise description of the Cotcot code, with the underlying algorithms: *Netlib* Runge-Kutta one-step ODE integrator [29], *Netlib* HYBRD Newton solver. The conjugate point test consists in checking a rank condition which is based on two methods: evaluating zeros of a determinant or a SVD (Singular Value Decomposition). The continuation method will be included in the code which can be a simple discretization of the homotopy path, with a Newton method at each step or a numeric continuation of the path, using the implicit ODE, where the Newton method is used only at the first step to initialize the continuation and at the final step, to solve the final shooting equation with arbitrary accuracy.

3 The restricted 3-body problem

3.1 The circular restricted 3-body problem in Jacobi coordinates

Recall the following representation of the Earth-Moon problem, see [24, 30]. In the rotating frame, the Earth which is the biggest primary planet with mass $1 - \mu$ is located at $(-\mu, 0)$ while the Moon with mass μ , is located at $(1 - \mu, 0)$ with the small parameter $\mu \simeq 0.012153$. We note $z = x + iy$ the position of the spacecraft and ϱ_1, ϱ_2 are the distances to the primaries

$$\varrho_1 = \sqrt{((x + \mu)^2 + y^2)}, \varrho_2 = \sqrt{((x - 1 + \mu)^2 + y^2)}.$$

The equation of motion takes the form

$$\ddot{z} + 2i\dot{z} - z = -(1 - \mu)\frac{z + \mu}{\varrho_1^3} - \mu\frac{z - 1 + \mu}{\varrho_2^3} \quad (10)$$

which can be written

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} - x = \frac{\partial V}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y = \frac{\partial V}{\partial y} \end{cases} \quad (11)$$

where $-V$ is the potential of the system defined by $V = \frac{1-\mu}{\varrho_1^3} + \frac{\mu}{\varrho_2^3}$. The system can be written using Hamiltonian formalism setting

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad p_1 = \dot{x} - y, \quad p_2 = \dot{y} + x$$

and the Hamiltonian describing the motion takes the form

$$H_0(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + p_1 q_2 - p_2 q_1 - \frac{1 - \mu}{\varrho_1} - \frac{\mu}{\varrho_2}.$$

3.2 Equilibrium points

The equilibrium points of the problem are well known. They split in two different types :

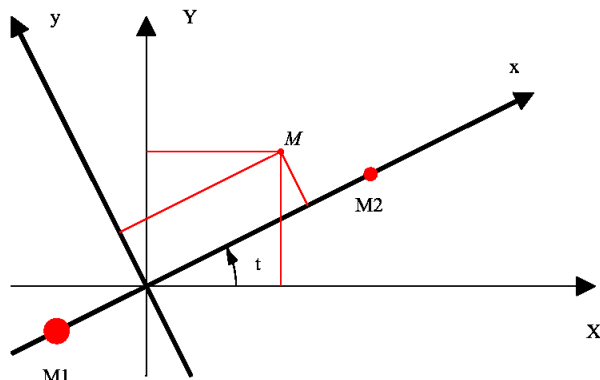


Figure 1: The rotating coordinates system (x, y) relatively to the inertial coordinates (X, Y) .

- *Euler points.* They are the collinear points denoted L_1 , L_2 and L_3 located on the line $y = 0$ defined by the primaries. For the Earth-Moon problem they are given by

$$x_1 \simeq 0.8369, \quad x_2 \simeq 1.1557, \quad x_3 \simeq -1.0051.$$

- *Lagrange points.* The two points L_4 and L_5 form with the two primaries an equilateral triangle.

Some important informations about stability of the equilibrium points are provided by the eigenvalues of the linearized system. The linearized matrix evaluated at points L_1 , L_2 or L_3 admits two real eigenvalues, one being strictly positive and two imaginary ones. The collinear points are consequently non stable. In particular, the eigenvalues of the linearized matrix evaluated at L_1 with $\mu = 0.012153$ are ± 2.931837 and $\pm 2.334248i$. When it is evaluated at L_4 or L_5 , the linearized matrix has two imaginary eigenvalues when $\mu < \mu_1 = \frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{69}}{9})$. So in the Earth-Moon system, the points L_4 and L_5 are stable, according to the Arnold's stability theorem [3] since $\mu < \mu_1$.

3.3 The control system

The control system in the rotating frame is deduced from the previous model and can be written using the Hamiltonian formalism

$$\dot{z} = \vec{H}_0(z) + u_1 \vec{H}_1(z) + u_2 \vec{H}_2(z)$$

where \vec{H}_0 is the free motion and \vec{H}_1 , \vec{H}_2 are the Hamiltonian vector fields corresponding to the functions $H_i = -q_i$ for $i = 1, 2$. As for the Kepler problem, see [15], the spacecraft mass variation may be modelled dividing u_i by $m(t)$ and

considering the equation $\dot{m} = -\delta|u|$. This will not be taken into account and we will focus on both time-minimal transfer problem

$$\min_{u(\cdot) \in B_{\mathbb{R}^2}(0, \epsilon)} \int_{t_0}^{t_f} dt \quad (12)$$

where ϵ is the maximum thrust allowed by spacecraft's engines and energy-minimal transfer problem

$$\min_{u(\cdot) \in \mathbb{R}^2} \int_{t_0}^{t_f} u_1^2 + u_2^2 dt$$

when the transfer time t_f is fixed and the constraint on the control bound is relaxed. The first problem will provide an estimation of the Earth-Moon transfer time when low thrust is used. The energy minimization problem will give a starting point in order to perform a homotopy method relating the final spacecraft mass maximization problem and the energy minimization problem

$$\min_{u(\cdot)} \int_0^{t_f} (\lambda|u|^2 + (1-\lambda)|u|) dt, \lambda \in [0, 1].$$

4 Time-minimal transfers in the Earth-Moon system

4.1 Normal case

4.1.1 Generalities on the normal case

Let us recall fundamental results about time-minimal control problems. Consider a bi-input control system on \mathbb{R}^n

$$\dot{q} = F_0(q) + \epsilon \sum_{i=1}^2 u_i F_i(q), \quad \epsilon > 0, \quad u_1^2 + u_2^2 \leq 1 \quad (13)$$

and the time-minimal problem

$$\min_{u(\cdot) \in B_{\mathbb{R}^2}(0, 1)} \int_{t_0}^{t_f} dt.$$

Then the pseudo-Hamiltonian from the maximum principle is

$$H(z, u) = p^0 + H_0(z) + \epsilon(u_1 H_1(z) + u_2 H_2(z))$$

where $z = (q, p) \in T^*\mathbb{R}^n$ and

$$H_i(z) = \langle p, F_i(q) \rangle, \quad i = 0, \dots, 2.$$

The maximization condition implies that when $(H_1, H_2) \neq (0, 0)$, the control u is given by

$$u_i = \frac{H_i}{\sqrt{H_1^2 + H_2^2}}, \quad i = 1, 2.$$

In the normal case $p^0 \neq 0$, one can normalize p^0 to -1 and so

$$H_r(z) = -1 + H_0(z) + \epsilon \sqrt{(H_1^2(z) + H_2^2(z))}.$$

Since the transfer time is not fixed, H_r is identically zero on $[0, t_f]$.

Definition 4.1. One calls *switching surface* the set

$$\Sigma = \{z \in T^*\mathbb{R}^n, H_1(z) = H_2(z) = 0\}.$$

One calls *point of order 0* an element $z \in T^*\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$ and *point of order 1* an element $z \in \Sigma$ such that $(\dot{H}_1(z), \dot{H}_2(z)) \neq 0$.

In particular, an extremal control belongs to the unit circle \mathbb{S}^1 outside the switching surface. Consider the specific case $q \in \mathbb{R}^4$. Under specific conditions, we have the following result, see [9] for the complete proof.

Proposition 4.1. *At a point of order 1, the control u instantaneously rotates of an angle π i.e. $u(t^+) = -u(t^-)$.*

The following proposition is a corollary of the above result.

Proposition 4.2. *Each normal time-minimal trajectory is a concatenation of a finite number of arcs of order 0 with π -singularities at junction points.*

As we will see in the section 4.1.3, the second order system of controlled equations of motion in the circular 3-body problem can be expressed as a bi-input system in \mathbb{R}^4 with

$$F_1 = \frac{\partial}{\partial q_3}, F_2 = \frac{\partial}{\partial q_4}.$$

Conditions of the proposition 4.2 are consequently fulfilled, see [9], that allows to use a continuation method on the control bound to compute time-minimal Earth-Moon trajectories.

4.1.2 Continuation method on the control bound

Considering a bi-input control system on \mathbb{R}^4 satisfying some regularity properties, proposition 4.2 asserts that the control corresponding to a time-minimal trajectory has a constant norm outside a set of measure zero. Such regularity properties are satisfied regarding the orbital transfer control in the Kepler problem, justifying the numerical continuation method on the control bound, see [15] and [18]. We stated that the same justification holds in the case of the restricted 3-body problem and we use the numerical continuation method to compute time-minimal extremals with low-thrust. By choosing the parameter ϵ corresponding to a large enough value, the time transfer is short and the simple shooting method directly converges on a starting point of the continuation method. Mention that our numerical study results in computing only extremals of order 0. Consequently, the time minimal extremal control vectors we determined are continuous along the transfer time. However, it is clear that the simple shooting and the continuation method can be performed with extremals of order one, providing the use of an adaptive integration step. As a preliminary study, we will focus on the Earth- L_1 transfer which is a good representation of the first phase of the Earth-Moon transfer. By simplifying the final condition, we make the simple shooting and the numerical continuation easier. So we compute more precise approximations of time-minimal extremals of the Earth-Moon transfer.

4.1.3 Time-minimal Earth- L_1 transfer

Set ϵ . Denoting $q = (q_1, q_2, q_3, q_4) = (x, y, \dot{x}, \dot{y})$, equations of motion in the rotating frame (11) become

$$\dot{q} = F_0(q) + \epsilon(F_1(q)u_1 + F_2(q)u_2), \quad u_1^2 + u_2^2 \leq 1 \quad (14)$$

where

$$F_0(q) = \begin{pmatrix} q_3 \\ q_4 \\ 2q_4 + q_1 - (1 - \mu) \frac{q_1 + \mu}{((q_1 + \mu)^2 + q_2^2)^{\frac{3}{2}}} - \mu \frac{q_1 - 1 + \mu}{((q_1 - 1 + \mu)^2 + q_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -2q_3 + q_2 - (1 - \mu) \frac{q_2}{((q_1 + \mu)^2 + q_2^2)^{\frac{3}{2}}} - \mu \frac{q_2}{((q_1 - 1 + \mu)^2 + q_2^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix},$$

$$F_1(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_2(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

We fix $\mu = 0.012153$ which corresponds to the gravitational constant in the Earth-Moon system. Choosing to approach the geostationary orbit by a circular one, we set $q_0 = (0.0977, 0, 0, 2.8792)$ as the initial condition. Since the aim of the transfer is to reach the point L_1 with a zero velocity, we fix $q_f = (0.8369, 0, 0, 0)$ as the final condition. Hence the time-minimal transfer problem can be written

$$(\mathcal{P}_\epsilon) \begin{cases} \dot{q} = F_0(q) + \epsilon(F_1(q)u_1 + F_2(q)u_2) \\ \min_{u(\cdot) \in B_{\mathbb{R}^2}(0,1)} \int_{t_0}^{t_f} dt \\ q(0) = q_0, \quad q(t_f) = q_f. \end{cases} \quad (15)$$

The condition $H_r = 0$ from the maximum principle being taken into account, the corresponding shooting function is given by

$$S : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$$

$$(t_f, p_0) \longrightarrow \begin{pmatrix} \exp_{q_0, t_f}(p_0) - q_f \\ H_r(q_f, p_f) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

where \exp_{q_0, t_f} is the exponential mapping associated with H_r . The spacecraft mass is assumed to be constant and equal to 350 kg and the parameter ϵ is initialized to 1 that is a large enough value to obtain the convergence of the shooting equation. Using a simple shooting, we compute an initial extremal whose corresponding transfer time t_f and initial costate p_0 are used as the starting point of the numerical continuation. The parameter ϵ is then reduced until 0.08. These numerical values were chosen referring to the status report of ESA concerning the SMART-1 mission, see [26, 27].

At each step of the algorithm, the first conjugate time t_c^1 along the extremal is computed in order to check the necessary condition of convergence $t_c^1 > t_f$. The numerical test of conjugate times takes into account an homogeneity property in p of extremal controls, see [8], involving that the rank of the restriction of Π_q to L_t is at most 3 for each $t > 0$. So one calculates Jacobi

ϵ	1	0.2	0.08
t_f	2.6421	11.9533	25.4931
t_c^1	3.7217	14.113	28.5194

Table 1: Comparison between the transfer time t_f and the first conjugate time t_c^1 (restricted 3-body problem time unit) along the time-minimal Earth- L_1 extremal trajectories.

fields $J_i(t) = (\delta q_i(t), \delta p_i(t))$ corresponding to $\delta p_i(0) = e_i$, $i = 1 \dots 4$ where $(e_i)_i$ is the canonical basis of \mathbb{R}^4 and one computes the rank of $(\delta q_1(t), \dots, \delta q_4(t))$ which is 3 outside a conjugate time and lower or equal to 2 at a conjugate time.

Fig. 2 and Table 1 show the time-minimal Earth- L_1 extremal trajectories in both fixed and rotating frames for $\epsilon = 1, 0.2$ and 0.08 and the comparison between the transfer time and the first conjugate time along these trajectories. According to the second order optimality condition, the time-minimal Earth- L_1 extremal trajectories we present are locally optimal. The ratio t_c^1/t_f decreases with ϵ . When $\epsilon = 1$, $t_c^1/t_f = 1.5$ and when $\epsilon = 0.08$, $t_c^1/t_f = 1.11$. We obtain a low-propulsion transfer time from the Earth to the point L_1 equal to 25.4931 units of the restricted 3-body problem, that corresponds to 110.85 days. Notice that the extremal transfers we compute are similar to transfers between Keplerian orbits when the Earth's influence is predominant and during which the pericenter argument is constant. Furthermore, for information only, let us mention that this transfer time is approximately five times lower than the time needed during the SMART-1 mission to reach the neighborhood of L_1 .

4.1.4 Time-minimal Earth-Moon transfer

In this section, we consider the time-minimal transfer up to the circular orbit around the Moon \mathcal{O}_M defined by

$$\mathcal{O}_M = \left\{ (q_1, q_2, q_3, q_4) \in \mathbb{R}^4, \begin{array}{l} (q_1 - 1 + \mu)^2 + q_2^2 = 0.0017 \\ q_3^2 + q_4^2 = 0.2946 \\ \langle (q_1 - 1 + \mu, q_2), (q_3, q_4) \rangle = 0 \end{array} \right\}.$$

Setting

$$h : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$q \longrightarrow \begin{pmatrix} (q_1 - 1 + \mu)^2 + q_2^2 - 0.0017 \\ q_3^2 + q_4^2 - 0.2946 \\ \langle (q_1 - 1 + \mu, q_2), (q_3, q_4) \rangle \end{pmatrix}, \quad (17)$$

the time-minimal Earth-Moon transfer problem writes

$$(\mathcal{P}'_\epsilon) \begin{cases} \dot{q} = F_0(q) + \epsilon(F_1(q)u_1 + F_2(q)u_2) \\ \min_{u(\cdot) \in B_{\mathbb{R}^2}(0,1)} \int_{t_0}^{t_f} dt \\ q(0) = q_0, \quad h(q(t_f)) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

The transversality condition from the maximum principle gives $p(t_f) \perp T_{q(t_f)}\mathcal{O}_M$. The mapping h being a submersion at each point of \mathcal{O}_M , this condition becomes

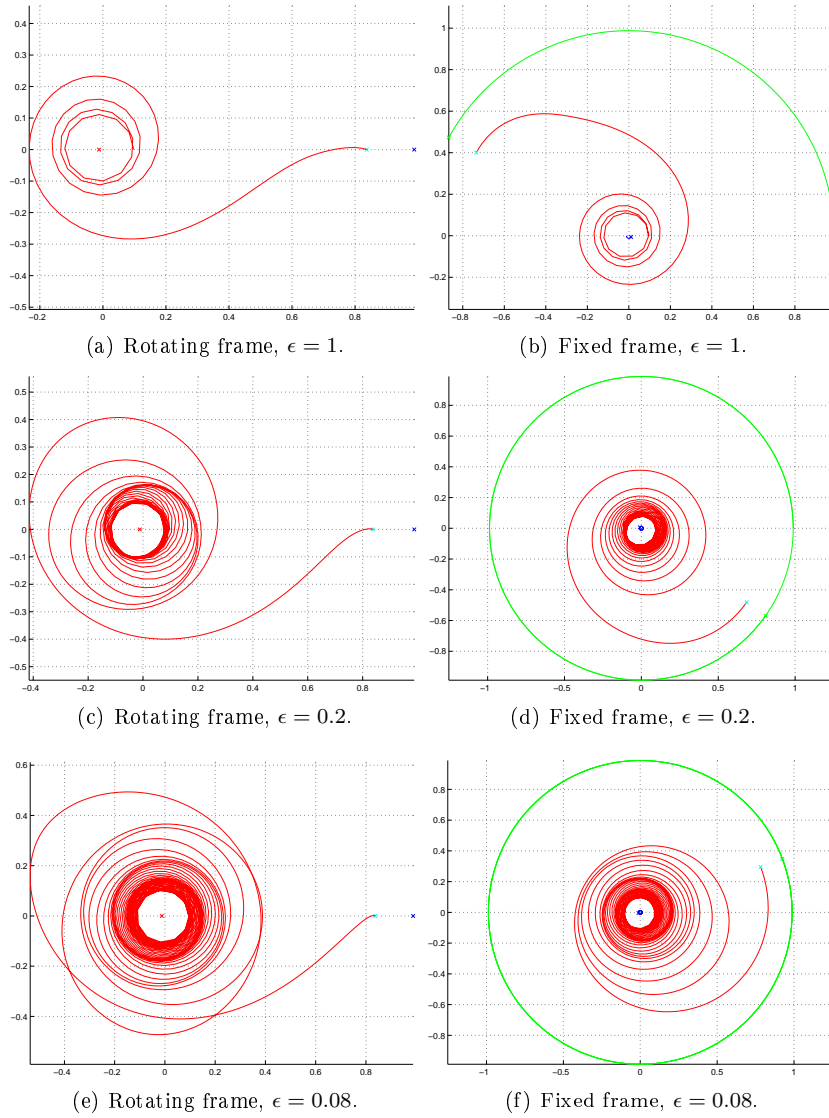


Figure 2: Time-minimal Earth- L_1 extremal trajectories. The red, cyan and blue crosses respectively represent the Earth, the point L_1 and the Moon. In (b), (d) and (f), the blue and green trajectories respectively correspond to Earth and Moon motion in the fixed frame.

$p(t_f) \in [\text{Ker } h'(q_f)]^\perp$. The vector space $\text{Ker } h'(q_f)$ being one-dimensional, one chooses $w \in \mathbb{R}^4$ such that $\text{Ker } h'(q_f) = \text{Vect}(w)$. Hence the corresponding shooting mapping is

$$S : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$$

$$(t_f, p_0) \longrightarrow \begin{pmatrix} h(q(t_f)) \\ \langle p(t_f), w \rangle \\ H_r(q(t_f), p(t_f)) \end{pmatrix}. \quad (19)$$

The continuation algorithm is applied using the same numerical values than in the case of the Earth- L_1 transfer. However the extremal trajectory associated with $\epsilon = 1$ is computed using a simple shooting for which (t_f, p_0) is initialized with the values determined using the simple shooting method up to the point L_1 .

Since the target is a manifold of codimension one, the concept of conjugate time is replaced by the concept of focal time, see the definition 2.7. At each step, a backwards in time integration is proceeded to compute the first focal time t_{foc}^1 . Let us consider the three-dimensional vector space spanned by Jacobi fields $J_i(t) = (\delta q_i, \delta p_i)$ for $i = 1, \dots, 3$ so that $J_i(0) \in T_{(q(t_f), p(t_f))} \mathcal{O}_M^\perp$ and $\delta p_i(0)$ satisfies the normalization condition $\langle p(t_f), \delta p_i(0) \rangle = 0$. The time t is a focal time if the rank of $(\delta q_1(-t), \dots, \delta q_3(-t))$ is strictly lower than 3.

The Earth-Moon extremal trajectories for $\epsilon=1, 0.2$ and 0.08 in both rotating and fixed frames and the comparisons between the transfer time and the first focal time are reported on Fig.3 and on Table 2. The continuation method provides a sequence of locally time-minimal extremal trajectories. One observes that the ratio t_{foc}^1/t_f fluctuates between 2.5 and 3 which is highly superior to ratios computed in the case of the Earth- L_1 transfer. The associated low-propulsion transfer time is 26.3974 units of the restricted 3-body problem (114.78 days) that is about five times lower than the duration of the mission Smart-1. Let us remark that, as we expected, the first phases of Earth-Moon transfers are actually comparable to Earth- L_1 transfers, demonstrating the point of the Earth- L_1 transfer.

ϵ	1	0.2	0.08
t_f	3.4971	11.392	26.3974
t_{foc}^1	no focal time in $[0, 10t_f]$	28.2788	74.4602

Table 2: Comparison between the transfer time t_f and the first focal time t_{foc}^1 (restricted 3-body problem time unit) along the time-minimal Earth-Moon extremal trajectories.

4.1.5 Time-minimal Earth- L_4 transfer.

Since this problem consists in reaching the point L_4 with a zero velocity, one fixes the target $q_f = (0.4878, 0.8660, 0, 0)$. Otherwise, the corresponding optimal control problem and shooting function are the same that in the time-minimal Earth- L_1 transfer case. The continuation method we use follows exactly the same principle that the one described in the section 4.1.3. The same numerical values are employed and the conjugate time are computed using the same test. Our results are presented on 4 and Table 3.

The efficiency of the numerical continuation on the control bound ϵ is demonstrated in the context of the time-minimal Earth- L_4 transfer. Indeed, we compute a family of locally time-minimal Earth- L_4 extremal trajectories, providing a low-thrust transfer strategy. Let us notice there is no conjugate point along extremal trajectories associated with $\epsilon = 1, 0.2$, whereas we found a first conjugate time twice bigger than the transfer time when $\epsilon = 0.08$. These extremal trajectories are, from a topological point of view, similar to the ones we computed in the time-minimal Earth- L_1 transfer case. A progressive deformation

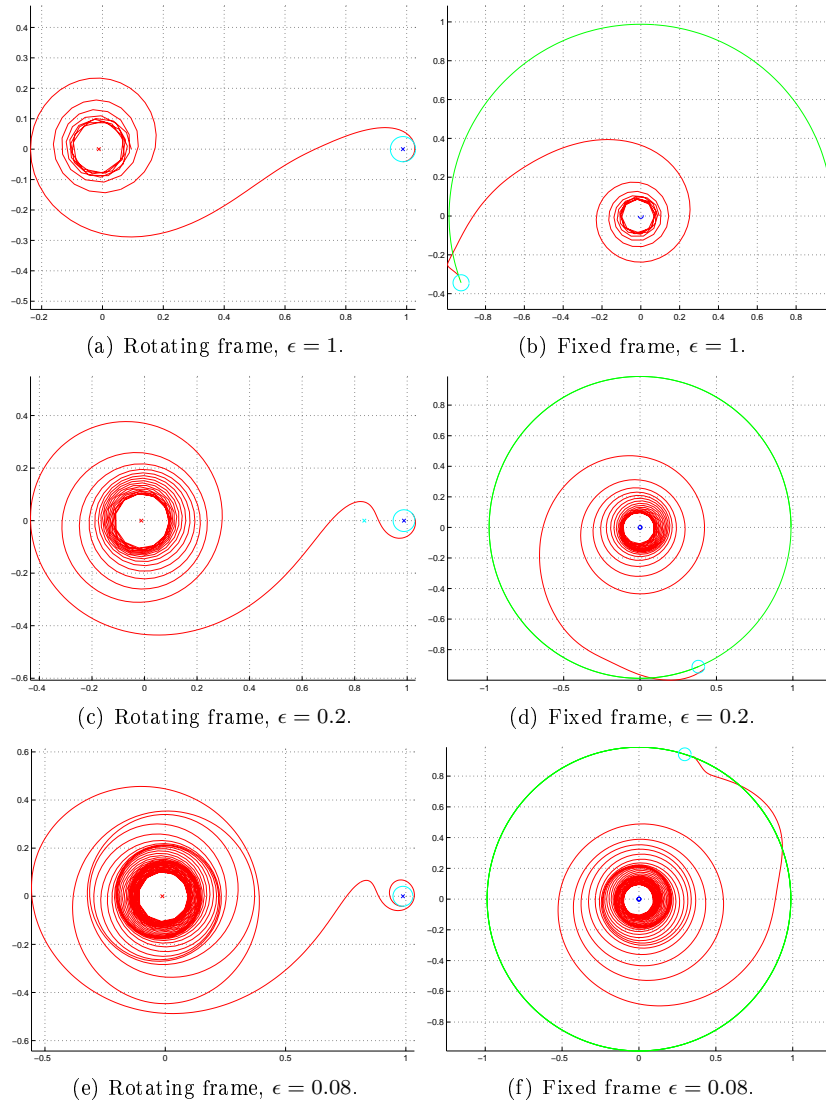


Figure 3: Time-minimal Earth-Moon extremal trajectories. The red and blue crosses respectively represent the Earth and the Moon. The target orbit is displayed in cyan. In (b), (d) and (f), the blue and green trajectories respectively correspond to Earth and Moon motion in the fixed frame.

ϵ	1	0.2	0.08
t_f	2.9157	11.7107	28.1911
t_c^1	no conjugate time in $[0, 5t_f]$	no conjugate time in $[0, 5t_f]$	53.1

Table 3: Comparison between the transfer time t_f and the first conjugate time t_c^1 (restricted 3-body problem time unit) along the time-minimal Earth- L_4 extremal trajectories.

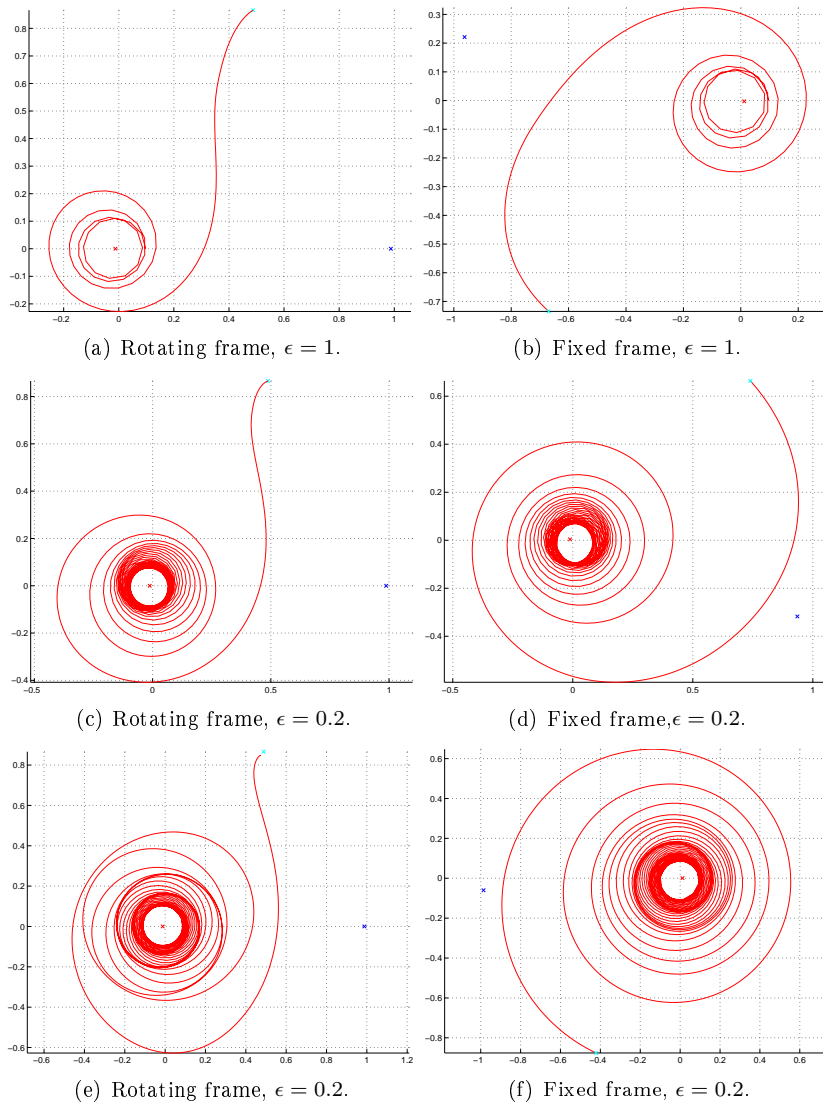


Figure 4: Time-minimal Earth- L_4 extremal trajectories. The red, cyan and blue crosses respectively represent the Earth, the point L_4 and the Moon.

from the circular orbit to an elliptic one that catches the point L_4 is observed. Moreover, it appears that, as in the Earth- L_1 case, the pericenter argument is constant along the transfer. The modification of the direction of the simple shooting method do not alter the topological nature of the extremal trajectories.

4.2 Abnormal case

4.2.1 Generalities in the abnormal case

In this section, we follow the theoretical framework from [12]. First let us recall the standard method to express a bi-input system as an equivalent single-input

system using a *Goh transformation*. Set $\epsilon > 0$ and consider the bi-input system

$$\dot{q} = F_0(q) + \epsilon \sum_{i=1}^2 u_i F_i(q), \quad q \in \mathbb{R}^n, \quad u_1^2 + u_2^2 = 1 \quad (20)$$

with the corresponding Hamiltonian

$$H(z) = H_0(z) + u_1 H_1(z) + u_2 H_2(z).$$

Using the parametrization

$$u_1 = \cos \alpha, \quad u_2 = \sin \alpha,$$

the equation of motion becomes

$$\dot{q} = F_0(q) + \epsilon \cos \alpha F_1(q) + \epsilon \sin \alpha F_2(q), \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (21)$$

and considering the augmented variable

$$\tilde{q} = \begin{pmatrix} q \\ \alpha \end{pmatrix},$$

one obtains the single-input system

$$\dot{\tilde{q}} = \tilde{F}_0(\tilde{q}) + v \tilde{F}_1(\tilde{q}) \quad (22)$$

where

$$\tilde{F}_0(\tilde{q}) = \begin{pmatrix} F_0(q) + \epsilon \cos \alpha F_1(q) + \epsilon \sin \alpha F_2(q) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}_1(\tilde{q}) = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{R}^4} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \dot{\alpha}.$$

We have :

Theorem 4.1. *Singular extremals of the system $(\tilde{F}_0, \tilde{F}_1)$ and the control*

$$\tilde{u}(\tilde{z}) = - \frac{\{ \{ H_{\tilde{F}_1}, H_{\tilde{F}_0} \}, H_{\tilde{F}_0} \}}{\{ \{ H_{\tilde{F}_1}, H_{\tilde{F}_0} \}, H_{\tilde{F}_1} \}}$$

are the integral curves of a smooth Hamiltonian vector field $\tilde{H}_r(\tilde{z})$ of the constrained space

$$H_{\tilde{F}_1} = \{ H_{\tilde{F}_1}, H_{\tilde{F}_0} \} = 0,$$

where

$$H_{\tilde{F}_0} = \langle \tilde{p}, \tilde{F}_0 \rangle, \quad H_{\tilde{F}_1} = \langle \tilde{p}, \tilde{F}_1 \rangle.$$

They correspond to singular extremals of the original system.

The following proposition gives a necessary and sufficient condition for a trajectory to be locally optimal in the abnormal case.

Proposition 4.3. *Under generic conditions, an abnormal extremal is locally time-minimal up to the first conjugate time t_{cc}^1 .*

The computation of t_{cc}^1 along an abnormal extremal takes into account the condition $H_{\tilde{F}_0} = 0$ and so differs from the computation of the first conjugate time t_c^1 associated with the normal case. More precisely, one obtains the next result.

Theorem 4.2. *Along an abnormal extremal, there holds $t_0 < t_{cc}^1 < t_c^1$.*

4.2.2 Numerical study of the abnormal case

We give a numerical illustration of the theorem 4.2 in the context of the time-minimal Earth- L_1 transfer with $\epsilon = 1$. First, we use the simple shooting method to find a zero of the shooting function

$$S : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$$

$$(t_f, p_0) \longrightarrow \begin{pmatrix} \exp_{q_0, t_f}(p_0) - q_f \\ H_r(q_f, p_f) \end{pmatrix}. \quad (23)$$

where $q_0 = (0.0977, 0, 0, 0)$, $q_f = (0.8369, 0, 0, 0)$ and \exp_{q_0, t_f} is the exponential mapping associated with the reduced Hamiltonian from the abnormal case

$$H_r(q, p) = H_0(q, p) + \sqrt{(H_1^2(q, p) + H_2^2(q, p))}.$$

We thus compute an abnormal Earth- L_1 extremal trajectory. In accordance with the theorem 4.1, this extremal corresponds to the singular extremal of the system $(\tilde{F}_0, \tilde{F}_1)$ defined by

$$\tilde{F}_0(\tilde{q}) = \begin{pmatrix} q_3 \\ q_4 \\ 2q_4 + q_1 - (1 - \mu) \frac{q_1 + \mu}{((q_1 + \mu)^2 + q_2^2)^{\frac{3}{2}}} - \mu \frac{q_1 - 1 + \mu}{((q_1 - 1 + \mu)^2 + q_2^2)^{\frac{3}{2}}} + \cos \alpha \\ -2q_3 + q_2 - (1 - \mu) \frac{q_2}{((q_1 + \mu)^2 + q_2^2)^{\frac{3}{2}}} - \mu \frac{q_2}{((q_1 - 1 + \mu)^2 + q_2^2)^{\frac{3}{2}}} + \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix},$$

and

$$\tilde{F}_1(\tilde{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

whose the projection on the phase space of the initial condition is given by $\tilde{q}_0 = (q_0, \alpha_0)$ where α_0 satisfies

$$u_1(t_0) = \cos \alpha_0, \quad u_2(t_0) = \sin \alpha_0.$$

Besides, the constraint $H_{\tilde{F}_1} = 0$ involves $p_\alpha = 0$. Consequently, the augmented initial costate is given by $\tilde{p}_0 = (p_0, 0)$.

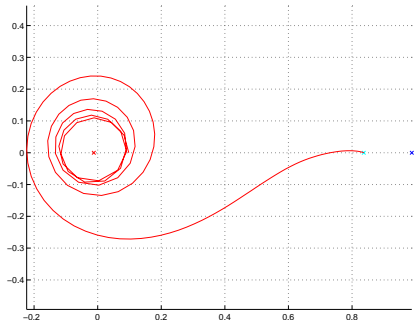
The numerical computation of the first conjugate time t_c^1 along the extremal trajectory is the same that in the normal case, see [8]. One computes the Jacobi fields corresponding to the system $(\tilde{F}_0, \tilde{F}_1)$ whose initial conditions $(\delta\tilde{q}_0, \delta\tilde{p}_0) = \delta\tilde{z}_0$ belong to the base of the vector space determined by

$$D_{\tilde{z}(0)} \tilde{H}_{\tilde{F}_1}(\delta\tilde{z}_0) = D_{\tilde{z}(0)} \{ \tilde{H}_{\tilde{F}_0}, \tilde{H}_{\tilde{F}_1} \}(\delta\tilde{z}_0) = 0$$

$$\langle \tilde{p}_0, \delta\tilde{p}_0 \rangle = 0$$

$$\tilde{q}_0 \in \mathbb{R}F_1(\tilde{q}_0).$$

Since the variables of this problem are 5-dimensional, there exists three such Jacobi fields denoted $J_i(t) = (\delta\tilde{q}_i(t), \delta\tilde{p}_i(t))$. One then computes the first time at which $(\delta\hat{q}_1(t), \dots, \delta\hat{q}_3(t), \tilde{F}_1(\tilde{q}(t))) \leq 2$. The numerical computation of t_{cc}^1



(a) Rotating frame

Figure 5: Time-minimal Earth- L_1 abnormal extremal trajectory, $\epsilon = 1$. The red, cyan and blue crosses respectively represent the Earth, the point L_1 and the Moon.

ϵ	t_f	t_{cc}^1	t_c^1
1	0.524	0.996	1.4

Table 4: Comparison between t_c^1 and t_{cc}^1 (restricted 3-body problem time unit) along the Earth- L_1 abnormal extremal.

follows the same principle but has to take into account the initial condition $D_{\tilde{z}(0)}\tilde{H}_0(\delta\tilde{z}_0) = 0$.

The abnormal trajectory in the rotating frame and the comparison between t_{cc}^1 and t_c^1 are displayed on Fig.5 and Table 4. The expected result is checked. The specific test for abnormal extremals provides a first conjugate time strictly inferior to the one given by the test corresponding to the normal case.

5 Energy-minimal transfers in the Earth-Moon system

5.1 Generalities

In the case of the energy-minimal transfer problem one can relax the control bound. So we consider the bi-input control system on \mathbb{R}^n

$$\dot{q} = F_0(q) + \sum_{i=1}^2 u_i F_i(q), \quad \epsilon > 0, \quad u \in \mathbb{R}^2 \quad (24)$$

associated with the problem of the minimization the energy cost

$$\int_{t_0}^{t_f} u_1^2 + u_2^2 dt$$

where the time transfer t_f is fixed. The pseudo-Hamiltonian from the maximum principle is

$$H(z, u) = p^0 \sum_{i=1}^m u_i^2 + \langle p, F(q, u) \rangle,$$

where $z = (q, p) \in T^*\mathbb{R}^n$ and $p^0 \leq 0$. If $p^0 < 0$ one can, using homogeneity, normalize p^0 to $-1/2$. From the maximization condition $\partial H / \partial u = 0$, one deduces that

$$u_i = H_i(z) = \langle p, F_i(q) \rangle, \quad i = 1, 2.$$

Substituting, one gets the true Hamiltonian

$$H_r(z) = H_0(z) + \frac{1}{2} \sum H_i^2(z).$$

5.2 The continuation method on the gravitational constant

The mathematical continuation method in the restricted circular problem was used by Poincaré, in particular for the continuation of circular orbits. Geometrically, it is simply a continuation of trajectories of the Kepler problem into trajectories of the 3-body problem. It amounts to consider μ as a small parameter, the limit case $\mu = 0$ being Kepler problem in the rotating frame, writing

$$H_0 = \frac{\|p\|^2}{2} - {}^t q K p - \frac{1}{\|q\|} + o(\mu)$$

and the approximation for μ is valid, a neighborhood of the primaries being excluded. In the Earth-Moon problem, since μ is very small, the Kepler problem is clearly a good approximation of the motion in a large neighborhood of the Earth. This point of view is important in our analysis, as indicated by the status report of the SMART-1 mission since most of the time mission is under the influence only of the Earth attraction, see [26, 27].

5.3 Energy-minimal Earth- L_1 transfer

Firstly we chose to simulate the energy-minimal Earth- L_1 transfer in the restricted 3-body problem. Indeed, when $\mu = 0$, the Moon and the point L_1 are identical. Furthermore, in the Earth-Moon system, the point L_1 and the Moon are located very closely, which suggests that the first phase of the Earth-Moon transfer is comparable, as in the time-minimal Earth-Moon transfer, to the Earth- L_1 transfer.

Retaining the notations of the section 4, the energy-minimal Earth- L_1 transfer problem, parametrized with μ and the transfer time t_f , can be written

$$(\mathcal{P}_\mu) \left\{ \begin{array}{l} \dot{q} = F_0(q) + F_1(q)u_1 + F_2(q)u_2 \\ \min_{u(\cdot) \in \mathbb{R}^2} \int_{t_0}^{t_f} u_1^2 + u_2^2 dt \\ q(0) = q_0, \quad q(t_f) = q_f \end{array} \right. \quad (25)$$

μ	0	0.012153
t_f	121	121
t_c^1	no focal time in $[0, 5t_f]$	121.932

Table 5: Comparison between the transfer time t_f and the first conjugate time t_c^1 (restricted 3-body problem time unit) along the energy-minimal Earth-Moon extremal trajectories.

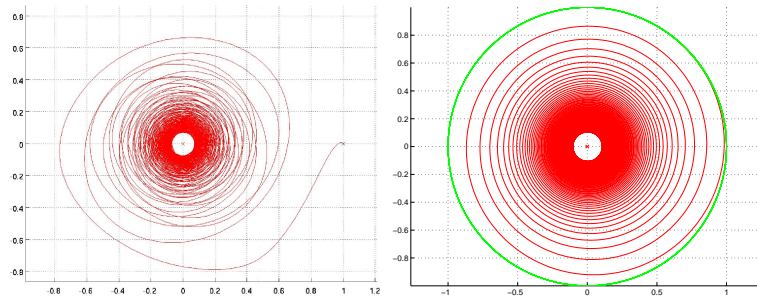
which leads to solve the shooting equation associated with the mapping

$$\begin{aligned}
 S : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\
 p_0 &\longrightarrow \exp_{q_0, t_f}(p_0) - q_f.
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

By making the parameter μ vary from 0 to 0.012153, one builds up a family $(S_\mu)_\mu$ of shooting functions which connects both Kepler and restricted 3-body problem. The continuation method may then be used to deduce an Earth- L_1 transfer with low-thrust from Keplerian trajectories. Referring to the status report of the SMART-1 mission, see [26, 27], we fix the transfer time to 121 units of the restricted 3-body problem (526.1365 days) and the spacecraft mass is assumed to be constant to 350kg. Setting $\mu = 0$, we compute an initial extremal using a simple shooting. Then we make the parameter μ vary up to 0.012153.

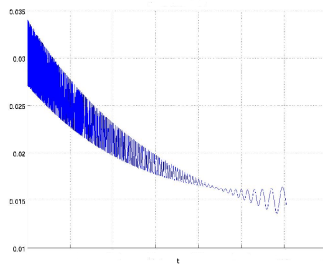
Since t_f is fixed, the domain of \exp_{x_0, t_c} is locally diffeomorphic to \mathbb{R}^4 , see [8]. Consequently one determines the first conjugate time by computing the Jacobi fields $J_i(t) = (\delta x_i(t), \delta p_i(t))$, $i = 1, \dots, 4$, corresponding to initial conditions $\delta x_i(0) = 0$ and $\delta p_i(0) = e_i$, where $(e_i)_i$ is the canonical basis of \mathbb{R}^4 . Then $\text{rank}(\delta x_1(t), \dots, \delta x_4(t))$ is equal to 4 outside a conjugate time and lower or equal to 3 at a conjugate time. Moreover we plot the Euclidean norm of extremal controls to compare the control bound and the maximal thrust allowed by electro-ionic engines.

Fig.6 and Table 5 show extremal trajectories in both rotating and fixed frames, the Euclidean norm of extremal controls and the comparisons between the transfer time and the first conjugate time in the Kepler problem and the restricted 3-body problem. The numerical continuation on μ provides an energy minimal Earth- L_1 extremal trajectory resulting from the distortion of a Keplerian one, in accordance with Poincaré's theory. This transfer consists in joining an elliptic orbit around the Earth from the geostationary one by preserving the pericenter argument, before reaching the point L_1 . The second order optimality condition ensures that the extremals are locally optimal in $L^\infty([0, t_f])$. One can notice that in both cases $\mu = 0$ and $\mu = 0.012153$, the maximum value reached by the norm of the extremal control is approximately twice inferior to the low-thrust bound $\epsilon \leq 0.08$ (0.073 N), but the transfer times are roughly the same.

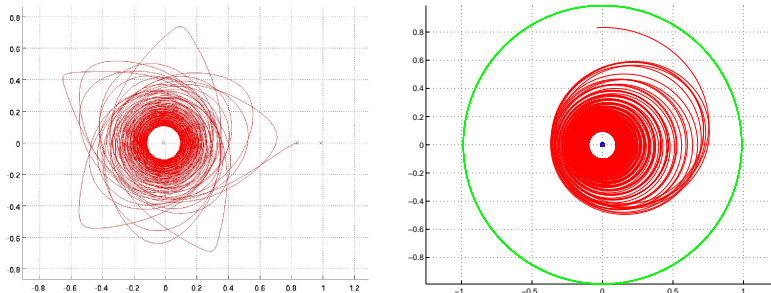


(a) Rotating frame, $\mu = 0$.

(b) Fixed frame, $\mu = 0$.

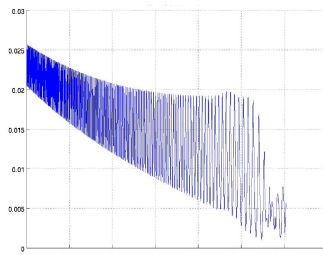


(c) Norm of the extremal control along the transfer, $\mu = 0$.



(d) Rotating frame, $\mu = 0.012153$.

(e) Fixed frame, $\mu = 0.012153$.



(f) Norm of the extremal control along the transfer, $\mu = 0.012153$.

Figure 6: Energy-minimal Earth- L_1 extremal trajectories. The red cross represents the Earth. In (b), the green trajectory correspond to motion of the point L_1 which is identical to the Moon. In (d) and (e), the point L_1 and the Moon are different and respectively represented by cyan and blue crosses. The green trajectory correspond to the Moon motion in the fixed frame.

5.4 Energy-minimal Earth-Moon transfer

Conserving the definition of the circular orbit around the Moon \mathcal{O}_M , the energy-minimization Earth-Moon transfer problem can be written

$$(\mathcal{P}'_\mu) \begin{cases} \dot{q} = F_0(q) + F_1(q)u_1 + F_2(q)u_2 \\ \min_{u(\cdot)} \int_{t_0}^{t_f} u_1^2 + u_2^2 dt \\ q(0) = q_0, \quad h(q(t_f)) = 0. \end{cases} \quad (27)$$

where h is the mapping defined in 17. The transfer time t_f is fixed and the shooting function S becomes

$$S : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ p_0 \longrightarrow \begin{pmatrix} (q_1 - 1 + \mu)^2 + q_2^2 - 0.0017 \\ q_3^2 + q_4^2 - 0.2946 \\ \langle q_1 - 1 + \mu, q_2 \rangle, \langle q_3, q_4 \rangle \\ \langle p(t_f), w \rangle \end{pmatrix}. \quad (28)$$

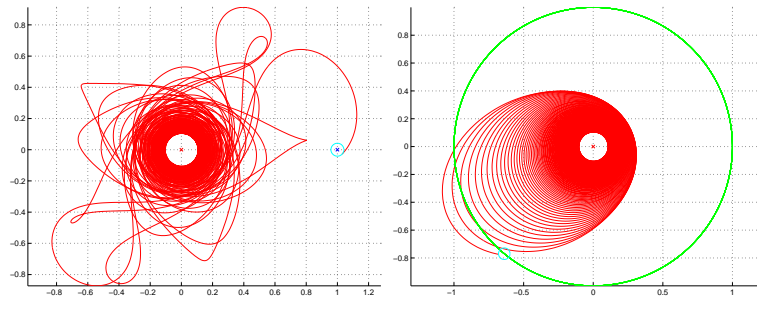
The transfer time is set to 124 time units of the restricted 3-body problem (539.18 days) and the spacecraft mass remains constant and equal to 350 kg. An extremal corresponding to $\mu = 0$ is computed using a simple shooting method, the initial costate p_0 being initialized with the one associated with the energy-minimal Earth- L_1 transfer.

The method to compute the first focal time has to take into account the fixed value of the transfer time, see [8]. Hence the normalization condition $\langle p(t_f), \delta p_i(0) \rangle = 0$ does not hold anymore. One considers the 4-dimensional vector space spanned by the Jacobi fields $J_i(t) = (\delta x_i, \delta p_i)$, $i = 1, \dots, 4$, satisfying $J_i(0) \in T_{z(t_f)} \mathcal{O}_M^\perp$. At time t one computes $\text{rank}(\delta x_1(-t), \dots, \delta x_4(-t))$ which is inferior or equal to 3 at a focal time and equal to 4 outside a focal time.

We thus compute a locally energy-minimizing Earth-Moon trajectory. In both cases $\mu = 0$ and $\mu = 0.012153$, the first focal time along extremal is superior to $3/2t_f$. The control bound is approximately 0.045, which corresponds to the half of the maximal thrust allowed by the SMART-1 low-propulsion engines. An interesting remark is that, when $\mu = 0$, the Keplerian Earth- L_1 trajectory significantly differs from the Keplerian Earth-Moon trajectory. This difference illustrates the effect of the transversality condition when the final target is a submanifold. On the contrary, when $\mu = 0.012153$ the first phase of the Earth-Moon transfer is comparable to the Earth- L_1 transfer. This underlines the crucial role of the neighborhood of the point L_1 where the attractions of the two primaries compensate each other. The Earth-Moon trajectories in both rotating and fixed frame, the norm of the extremal controls the comparison between the first focal time and the transfer time are shown on Fig.7 and Table 6, for $\mu = 0$ and $\mu = 0.012153$.

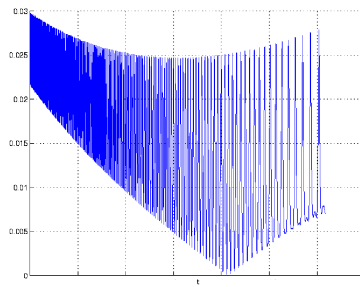
6 Conclusion

The main contribution of this article is to provide two large sets of time-minimal and energy-minimal spatial trajectories inside the Earth-Moon system, considered as solution of the controlled restricted 3-body problem, in a context of

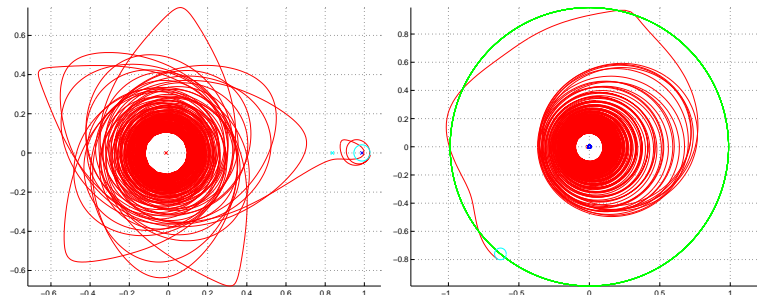


(a) Rotating frame, $\mu = 0$.

(b) Fixed frame, $\mu = 0$.

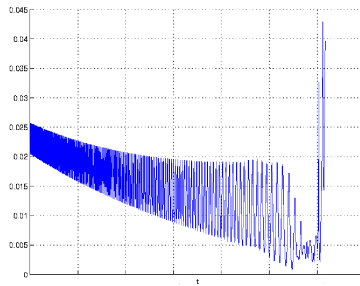


(c) Norm of the extremal control along the transfer, $\mu = 0$.



(d) Rotating frame, $\mu = 0.012153$.

(e) Fixed frame, $\mu = 0.012153$.



(f) Norm of the extremal control along the transfer, $\mu = 0.012153$.

Figure 7: Energy-minimal Earth-Moon extremal trajectories. The red and blue crosses respectively represent the Earth and the Moon. The cyan circle is the target orbit. In (b) and (e), the blue and green trajectories respectively correspond to Earth and Moon motion in the fixed frame.

μ	1	0.2
t_f	124	124
t_{foc}^1	192.5432	212.5761

Table 6: Comparison between the transfer time t_f and the first focal time t_{foc}^1 (restricted 3-body problem time unit) along the energy-minimal Earth-Moon extremal trajectories.

low-thrust. In particular, we estimate the time optimal low-energy transfer between the geostationary orbit and a circular parking orbit around the Moon. We also provide a numerical checking of the comparison theorem between the first conjugate times in normal and abnormal cases related to the time-minimal problem. Moreover, by giving an estimation of the energy minimizing trajectory between the same orbits, we suggest a starting point for the homotopy method which relates the energy minimization problem and the final spacecraft mass problem. Our computations result from an original application of indirect numeric methods, inspired by the Pontryagin maximum principle, to the particular planar restricted 3-body problem and the optimality of these transfers is checked using second order conditions. The efficiency of such a process is well-known for strongly depending on determining accurate initial conditions, which is performed thanks to relevant continuation methods, founded on numeric, in the time-minimal case, or physical, in the energy-minimal case, considerations. Furthermore, this work underlines the crucial role played by the Lagrangian point L_1 by verifying that the first phase of an optimal Earth-Moon trajectory is similar to an Earth- L_1 transfer, that is comparable to a transfer between Keplerian orbits in the Earth's gravity area during which the pericenter argument is constant. This encourages futures studies dealing with the link between the invariant manifolds in the neighborhood of L_1 and optimal transfers in the restricted 3-body problem. In addition, we give some important qualitative observations about extremal of the restricted 3-body problem since it appears that the topological characteristics of time-minimal extremal trajectories are preserved when the transfer's target is modified, as we noticed by comparing transfers up to the points L_1 and L_4 .

Acknowledgments

The author thanks Pr. B. Bonnard and Pr. J.B. Caillau from the Mathematics Institute of the Bourgogne University for many advices and helpful discussions.

References

- [1] A.A. Agrachev and A.V. Sarychev, *On abnormal extremals for Lagrange variational problem*, Math. Syst. Estim. Cont., **8** (1998), 87–118.
- [2] E.L Allgower and K. Georg, "Numerical continuation methods, an introduction", S Springer, Berlin, 1990.

- [3] V. I. Arnold, "Mathematical methods of classical mechanics", Springer, New-York, 1989.
- [4] J.T. Betts and S.O. Erb, *Optimal low thrust trajectories to the Moon*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst., **2** (2003), 144–170.
- [5] C. Bischof, A. Carle, P. Kladem and A. Mauer, *Adifor 2.0: Automatic Differentiation of Fortran 77 programs.*, IEEE Computational Science and Engineering, **3,(3)** (1996), 18–32.
- [6] G. A. Bliss, "Lectures on the Calculus of Variations", Chicago, 1946.
- [7] A. Bombrun, J.Chetboun and J-B Pomet, *Transfert Terre-Lune en poussée faible par contrôle feedback – La mission SMART-1*, (French) INRIA Research report, **5955** (2006), 1–27.
- [8] B. Bonnard, J.-B. Caillau and E. Trélat, *Second order optimality conditions in the smooth case and applications in optimal control*, ESAIM Control Optim. and Calc. Var., **13** (2007), 207–236.
- [9] B. Bonnard, J.-B. Caillau and E. Trélat, *COTCOT: short reference manual*, ENSEEIHT-IRIT Technical report RT/APO/05/1, (2005).
- [10] B. Bonnard and M. Chyba, "Singular trajectories and their role in control theory", Math. and Applications 40, Springer, 2003.
- [11] B. Bonnard, L. Faubourg and E. Trélat, "Mécanique céleste et contrôle des véhicules spatiaux", Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [12] B. Bonnard and I. Kupka, *Théorie des singularités de l'application entrée/sortie et optimalité des trajectoires singulières dans le problème du temps minimal*, (French)[Theory of the singularities of the input/output mapping and optimality of singular trajectories in the minimal-time problem], Forum Math., **2** (1998), 111–159.
- [13] B. Bonnard, J.B. Caillau and G. Picot *Geometric and numerical techniques in optimal control of the two and three body problems*, Commun. Inf. Syst, **10** (2010), to appear.
- [14] B. Bonnard, N. Shcherbakova and D. Sugny, The smooth continuation method in optimal control with an application to control systems, *ESAIM Control Optim. and Calc. Var.*, to appear.
- [15] J.-B. Caillau, "Contribution à l'étude du contrôle en temps minimal des transferts orbitaux", Ph.D thesis, Toulouse, 2000.
- [16] J.-B. Caillau, B. Daoud and J. Gergaud, *On some Riemannian aspects of two and three-body controlled problems*, Recent Advances in Optimization and its Applications in Engineering, to appear, (2009).
- [17] J.-B. Caillau, B. Daoud and J. Gergaud, *Discrete and differential homotopy in circular restricted three-body control*, submitted to *AIMS proceedings* (2010).

- [18] J. Gergaud and T. Haberkorn, *Homotopy method for minimum consumption orbit transfer problem*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., **12** (2006), 294–310.
- [19] G. Gómez, S.Koon, M. Lo, J.E Marsden, J. Madesmont and S.D. Ross, *Invariant manifolds, the spatial three-body problem and space mission design*, Adv. Astronaut. Sci, **109** (2001), 3–22.
- [20] M. Guerra and A. Sarychev, *Existence and Lipschitzian regularity for relaxed minimizers*, Mathematical control theory and finance, 231–250, Springer, Berlin 2008.
- [21] J.E. Marsden and S.D. Ross, *New methods in celestial mechanics and mission design*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S), **43** (2006), 43–73.
- [22] K. Meyer and G. R. Hall, “Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N -body problem”, Springer, New York, 1992.
- [23] H. Poincaré, “Oeuvres”, Gauthier-Villars, Paris, 1934.
- [24] H. Pollard, “Mathematical introduction to celestial mechanics”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966.
- [25] (MR1301779) L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze and E. F. Mishchenko, “The mathematical theory of optimal processes”, John Wiley & Sons, New York, 1962.
- [26] G. Racca, B. H. Foing and M. Coradini, *SMART-1: The first time of Europe to the Moon*, Earth, Moon and planets, **85-86** (2001), 379–390.
- [27] G. Racca *et al.*, *SMART-1 mission description and development status*, Planetary and space science, **50** (2002), 1323–1337.
- [28] A.V. Sarychev, *The index of second variation of a control system*, Matem. Sbornik, **113** (1980), 464–486.
- [29] L.F. Shampine, H.A. Watts and S. Davenport, *Solving non-stiff ordinary differential equations-the state of the art.*, Technical report sand75-0182, Sandia Laboratories, Albuquerque, New Mexico (1975).
- [30] V. Szebehely, “Theory of orbits: The restricted problem of three bodies”, Academic Press, 1967.

Energy-minimal transfers in the vicinity of the Lagrangian point L_1 .

G. Picot*

Abstract. This article deals with the problem of computing energy-minimal trajectories between the invariant manifolds in the neighborhood of the equilibrium point L_1 of the restricted 3-body problem. Initializing a simple shooting method with solutions of the corresponding linear optimal control problem, we numerically compute energy-minimal extremals from the Pontryagin's Maximum principle, whose optimality is ensured thanks to the second order optimality condition.

Key Words. Optimal control, 3-body problem, numerical analysis methods.

AMS subject classification. 49K15, 49M05, 70F07.

1 Introduction

Computing energy-minimal orbit transfers is one of the crucial challenges to take up to design space missions using low-propulsion. In particular, the SMART-1 mission from the European Space Agency, see [11], has motivated numerous studies dealing with low thrust trajectories from the Earth to the Moon, using for instance simple feedback laws [3] or the transcription method [2]. In [4], optimal transfers between quasi-Keplerian orbits in the Earth-Moon system are computed basing on numeric methods connected with fundamental results from geometric control theory. The free motion of the spacecraft is described by the equations of the planar restricted 3-body problem, [13]: two primaries are circularly revolving around their center of mass with a constant angular velocity under the influence of their mutual gravitational attraction and a third body with negligible mass is moving in the plane defined by the motion of the two primaries. Adding control terms in the equations of motion, extremal curves solutions of the Pontryagin's Maximum Principle [10] are numerically computed using simple shooting and smooth continuation methods. Their local optimality is checked according with the second order optimality condition related with the notion of conjugate points. In figure 1 is displayed an example of such an optimal trajectory.

In this article, the above methods are used to compute energy-minimal transfers in the vicinity of the equilibrium point L_1 of the spatial restricted 3-body problem where the vertical dimension is taken into account. Indeed, the study of

*Mathematics Institute, Bourgogne University, 9 avenue Savary, F-21078 Dijon (gautier.picot@u-bourgogne.fr), supported by CNRS (contract no. 37244) and Conseil Régional de Bourgogne (contrat no. 079201PP02454515)

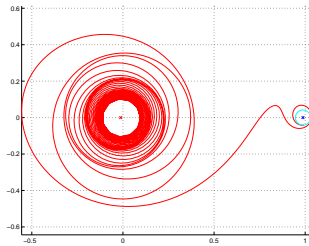


Figure 1: Energy minimal Earth-Moon trajectory in the rotating frame. The neighborhood of the point L_1 acts as the way from Earth's to Moon's gravity area.

the flow in the equilibrium region exhibits invariant manifolds of orbits asymptotic to an invariant 3-sphere of bounded orbits, see [9]. These invariant manifolds can be used as low energy passageways connecting primaries' attraction areas and this is why we investigate the problem of minimizing the energy cost to reach one from one other.

The first section of this article focus on the dynamics of the spatial problem in the vicinity of the point L_1 . Equations of motion can be written in Hamiltonian form and the study of the linearized system shows that local behavior is of the type saddle \times center \times center, allowing to classify orbits in bounded, asymptotic, transit and non-transit orbits, see [9]. The second section is devoted to the linearized control system. Using standard results from the linear control theory, see [8], we explicitly computes the optimal control using to reach the instable manifold toward the Moon from the stable manifold from the Earth. The initial adjoint vector η_0 from the maximum principle depends on the initial condition in the phase space z_0 and can be computed integrating backwards a Riccati matricial equation. In the last section, we use this value of η_0 to initialize the simple shooting method and numerically compute energy-minimal extremal solutions associated with the non-linear control system, whose local optimality is ensured by the second order conditions.

2 Spatial problem and dynamics in the vicinity of equilibrium points

Let us recall the equations of the three degree-freedom circular restricted 3-body problem, see [13] for further details. Units of time, mass and length are normalized so that the sum of the primaries masses, the distance between the primaries, their angular velocity and the gravitational constant are 1. Choosing a positively oriented synodic reference system $\{O, X, Y, Z\}$, the origine is the barycenter of the two primaries. The biggest primary (the Earth) with mass $1 - \mu$ is located at $(\mu, 0, 0)$ and the smallest one (the Moon) with mass mass μ is located at $(\mu - 1, 0, 0)$. The equations of motion of the third body (the spacecraft) take the form

$$\ddot{X} - 2\dot{Y} = \frac{\partial V}{\partial X}, \quad \ddot{Y} + 2\dot{X} = \frac{\partial V}{\partial Y}, \quad \ddot{Z} = \frac{\partial V}{\partial Z} \quad (1)$$

where the potential is given by

$$V = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) - \frac{1 - \mu}{((X + \mu)^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu}{((X - 1 + \mu)^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Setting $p_X = \dot{X} - Y$, $p_Y = \dot{Y} + X$ and $p_Z = \dot{Z}$, one can write the equations in Hamiltonian form associated with the Hamiltonian function

$$H = \frac{1}{2}(p_X^2 + p_Y^2 + p_Z^2) + Yp_X - Xp_Y - \frac{1 - \mu}{\rho_1} - \frac{\mu}{\rho_2}.$$

The equilibrium points of the problem are well known. They all belong to the XY-plane and split in two different types. Firstly, the collinear points, denoted L_1 , L_2 and L_3 , are located on the line $y = 0$ defined by the primaries. Secondly, the equilateral points, denoted, L_4 and L_5 , form with the two primaries an equilateral triangle.

To study the dynamics in the vicinity of a collinear equilibrium point $L_{i=1, 2, 3}$, one translates the origine to the location of L_i and applies some scaling so that the distance γ_j from L_i to the closest primary is 1. The equations of motion become

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} - (1 + c_2)x &= \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right), \\ \ddot{y} + 2\dot{x} + (c_2 - 1)y &= \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right) \\ \ddot{z} + 2c_2 z &= \frac{\partial}{\partial z} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

where P_n denotes the Legendre polynomial of order n , $\rho = x^2 + y^2 + z^2$ and the coefficients c_n depend on both libration points and the constant μ . Skipping the non-linear terms, one obtains the linearized equation

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - (1 + c_2)x = 0, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} + (c_2 - 1)y = 0, \quad \ddot{z} + 2c_2 z = 0. \quad (3)$$

Defining p_x, p_y and p_z as previously, the linearized equation is equivalent to the Hamiltonian system associated with the function

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + yp_x - xp_y - \frac{c_2}{2}(2x^2 - y^2 - z^2). \quad (4)$$

It is not difficult to check that the linear behavior in the vicinity of $L_{i=1, 2, 3}$ is of type saddle \times center \times center with two real and four imaginary eigenvalues denoted $(\pm\lambda_1, \pm i\omega_1, \pm i\omega_2)$ see [9]. Moreover, one can show that the matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2\lambda_1}{s_1} & 0 & 0 & -\frac{2\lambda_1}{s_1} & \frac{2\omega_1}{s_2} & 0 \\ \frac{\lambda_1^2 - 2c_2 - 1}{s_1} & -\frac{\omega_1^2 - 2c_2 - 1}{s_2} & 0 & \frac{\lambda_1^2 - 2c_2 - 1}{s_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\omega_2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda_1^2 + 2c_2 + 1}{s_1} & -\frac{\omega_1^2 + 2c_2 + 1}{s_2} & 0 & \frac{\lambda_1^2 + 2c_2 + 1}{s_1} & 0 & 0 \\ \frac{\lambda_1^3 + (1 - c_2)\lambda_1}{s_1} & 0 & 0 & -\frac{\lambda_1^3 - (1 - c_2)\lambda_1}{s_1} & -\frac{\omega_1^3 + (1 - c_2)\omega_1}{s_1} & \frac{\lambda_1^2 + 2c_2 + 1}{s_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\omega_2}} \end{pmatrix}$$

where

$$s_1 = (2\lambda_1((4+3c_2)\lambda_1^2 + 4 + 5c_2 - 6c_2^2))^{\frac{1}{2}}, \quad s_2 = (\omega_1((4+3c_2)\omega_1^2 - 4 - 5c_2 + 6c_2^2))^{\frac{1}{2}},$$

defines a symplectic change of variables that, denoting $z = (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ the new coordinates, casts the Hamiltonian 4 into

$$H = \lambda_1 q_1 p_1 + \frac{\omega_1}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \frac{\omega_2}{2}(q_3^2 + p_3^2). \quad (5)$$

The analysis of the flow of the linearized system in the equilibrium region \mathcal{R} , determined for positive h and c by $H = h$ and $|q_1 - p_1| \leq c$, can be performed noting that, when $q_1 p_1 \neq 0$, the projections of the orbits in the $q_1 p_1$ -plane lie on the branches of hyperbolas $q_1 p_1 = \text{constant}$, since $q_1 p_1$ is a first integral of the linearized equation. One thus distinguishes four categories of orbits [9]:

- the point $(q_1, p_1) = 0$ corresponds to an invariant 3-sphere S_h^3 of *bounded orbits*,
- the *asymptotic orbits* gather the stable and unstable manifolds of S_h^3 , respectively denoted $W_{\pm}^s(S_h^3)$ and $W_{\pm}^u(S_h^3)$ and given by

$$W_{\pm}^s(S_h^3) = \left\{ \frac{\omega_1}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \frac{\omega_2}{2}(q_3^2 + p_3^2) = h, \quad q_1 = 0, \quad p_1 = 0 \right\}$$

$$W_{\pm}^u(S_h^3) = \left\{ \frac{\omega_1}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \frac{\omega_2}{2}(q_3^2 + p_3^2) = h, \quad p_1 = 0, \quad q_1 = 0 \right\}$$

- the hyperbolic segments $q_1 p_1 = \text{constant} > 0$ correspond to *transit orbits*,
- the hyperbolic segments $q_1 p_1 = \text{constant} < 0$ correspond to *non-transit orbits*.

Let us mention that the non-linear dynamics in the Region \mathcal{R} is qualitatively the same than the linear one, see [9]. In this case, there exists a normally periodic invariant manifold \mathcal{M}_3^h which still has stable and unstable manifolds which can be approximated by the invariant manifolds $W_{\pm}^s(S_h^3)$ and $W_{\pm}^u(S_h^3)$, the non-linear terms being much smaller than the linear ones in a neighborhood of the collinear point.

3 Linear control system with energy cost around the point L_1 .

From now on, we focus on studying the controlled dynamics around the Lagrangian point L_1 . Our aim is to compute energy-minimal transfers reaching the positive branch of the unstable manifolds $W_+^u(S_h^3)$ from the positive branch of the stable manifolds $W_+^s(S_h^3)$. Indeed, $W_+^s(S_h^3)$ (resp. $W_+^u(S_h^3)$) is a dynamical channel which connects the Earth's (resp. Moon's) attraction area and a closed neighborhood of L_1 as time increases (resp. decreases) that justifies the interest of such transfers for designing low-energy Earth-Moon trajectories. Let us start by investigating the linearized control system

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - (1 + c_2)x = u_1, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} + (c_2 - 1)y = u_2, \quad \ddot{z} + 2c_2 z = u_3. \quad (6)$$

which is obtained adding control terms in the equations of motion 3. Thus, the Hamiltonian function 4 becomes

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + yp_x - xp_y + c_2(x^2 + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}) - u_1x - u_2y - u_3z. \quad (7)$$

Applying the symplectic change of variable A , equation 3 can be written

$$\dot{z} = Az + Bu \quad (8)$$

where

$$B = \begin{pmatrix} \frac{2\lambda_1}{s_1} & \frac{\lambda_1^2 - 2c2 - 1}{s_1} & 0 \\ \frac{2\omega_1}{s_2} & \frac{-\omega_1^2 - 2c2 - 1}{s_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\lambda_1}{s_1} & \frac{\lambda_1^2 - 2c2 - 1}{s_1} & 0 \\ 0 & \frac{-\omega_1^2 - 2c2 - 1\lambda_1}{s_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\omega_2}} \end{pmatrix}.$$

Considering no constraints on the control bound, the Kalman condition, see [8], asserts that the system 8 is controlable. Let us fix a transfer time t_f . Therefore, determining an energy-minimal transfer from $W_+^s(S_h^3)$ to $W_+^u(S_h^3)$ consists in solving the following linear optimal control problem with quadratic cost

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + Bu \\ \min_{u(\cdot) \in \mathbb{R}^2} & \int_{t_0}^{t_f} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 dt \\ z(0) &\in W_+^s(S_h^3), \quad z(t_f) \in W_+^u(S_h^3). \end{aligned} \quad (9)$$

Set $z_0 \in W_+^s(S_h^3)$. From the standard linear quadratic maximum principle, see [8], there exists a unique optimal control u^* solving 9; the corresponding optimal response z^* and adjoint vector $\eta^* \in T_{z^*}^* W_+^s(S_h^3)$ are found as any solutions of the system

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + BB^T \eta^T, \quad \dot{\eta} = -\eta A \\ z(0) &= z_0, \quad z(t_f) \in \partial W_+^u(S_h^3) \\ \eta(t_f) &\text{ is interior normal to } W_+^u(S_h^3) \text{ at } z(t_f). \end{aligned} \quad (10)$$

and u^* is given by

$$u^*(t) = B^T \eta^T(t). \quad (11)$$

Given an initial $\eta_0 \in T_{z_0}^* W_+^s(S_h^3)$ such that (z_f, η_f) fullfils the final transversality condition of the system 10, the solution of the linear differential system 10 is

$$\begin{pmatrix} z(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = \exp^t \begin{pmatrix} A & BB^T \\ 0 & -A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

and substituting in 11, the optimal control can be explicitly written

$$u^*(t) = \begin{pmatrix} \frac{2\lambda_1}{s_1} (\eta_{q_1}^0 e^{-\lambda_1 t} + \eta_{p_1}^0 e^{\lambda_1 t}) - \frac{2\omega_1}{s_2} (\eta_{q_2}^0 \cos(\omega_1 t) + \eta_{p_2}^0 \sin(\omega_1 t)) \\ \frac{\lambda_1^2 - 2c2 - 1}{s_1} (-\eta_{q_1}^0 e^{-\lambda_1 t} + \eta_{p_1}^0 e^{\lambda_1 t}) - \frac{\omega_1^2 + 2c2 + 1}{s_2} (\eta_{p_2}^0 \cos(\omega_1 t) - \eta_{q_2}^0 \sin(\omega_1 t)) \\ \frac{1}{\sqrt{\omega_2}} (\eta_{p_3}^0 \cos(\omega_2 t) - \eta_{q_3}^0 \sin(\omega_2 t)) \end{pmatrix}.$$

Such an initial adjoint η_0 can be determined integrating backwards a Riccati matricial equation, see [8]. Indeed, since $W_+^u(S_h^3)$ is a cylinder, the condition $\eta(t_f)$ is interior normal to $W_+^u(S_h^3)$ at $z(t_f)$ involves

$$\eta^{*T}(t_f) = -z^{*T}(t_f)Q \quad (13)$$

where the matrix Q is given by

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k\omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k\omega_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k\omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k\omega_2 \end{pmatrix}$$

and the constant k is strictly positive. Since the couple (z^*, η^*) satisfies

$$\dot{z} = Az + BB^T\eta^T, \quad \dot{\eta} = -\eta A$$

one can show that

$$\eta^*(t) = z^{*T}(t)E(t)$$

where E is the solution of the Riccati matricial equation

$$\begin{aligned} \dot{E} &= -A^T E - EA - EBB^T E \\ E(t_f) &= -Q. \end{aligned} \quad (14)$$

The optimal control u^* is consequently a feedback control given by

$$u^*(t) = B^T E(t)z(t)$$

and integrating backwards the equation 14 allows to obtain the appropriate initial condition

$$\eta^*(0) = z_0^{*T} E(0).$$

4 Energy-minimal transfers computations around the point L_1 .

Let us now consider the non-linear control system in the vicinity of L_1

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} - (1 + c_2)x &= \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right) + u_1 \\ \ddot{y} + 2\dot{x} + (c_2 - 1)y &= \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right) + u_2 \\ \ddot{z} + 2c_2 z &= \frac{\partial}{\partial z} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right) + u_3 \end{aligned} \quad (15)$$

which is derived from 2. As we mentioned previously, the invariant manifolds of the linear dynamics near L_1 are good approximations of the invariant manifolds that exist in the non-linear dynamics case. This is why we keep the

definition of $W_+^s(S_h^3)$ and $W_+^u(S_h^3)$ we gave in section 2. For the sake of simplicity, we investigate the problem of computing energy-minimal transfers from the submanifold $W_\alpha^s(S_h^3)$ where α is a strictly positive constant and p_1 is set to α , to $W_\alpha^u(S_h^3)$ where q_1 is set to α . Once again, the transfer time t_f is fixed and no constraints on the control bound are considered. Keeping the notation $z = (q, p) = (x, y, z, p_x, p_y, p_z)$, the optimal control problem we are investigating writes

$$\begin{aligned} \dot{z} &= F_0(z) + \sum_{i=1}^3 u_i F_i(z) \\ \min_{u(\cdot) \in \mathbb{R}^2} \int_{t_0}^{t_f} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 dt \\ z(0) &\in W_\alpha^s(S_h^3), \quad z(t_f) \in W_\alpha^u(S_h^3) \end{aligned} \quad (16)$$

where

$$F_0(z) = \begin{pmatrix} p_x + y \\ p - y - x \\ p_z \\ \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n \geq 2} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right) + p_y - x \\ \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n \geq 2} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right) - x - y \\ \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n \geq 2} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right) \end{pmatrix}, \quad F_i(z) = \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Control theory provides powerful tools to study optimal solutions from the geometric point of view. First, from the Pontryagin's Maximum Principle, see [10], optimal solutions are found among extremal curves $(z, \eta) \in T^*\mathbb{R}^6$ solutions of the system

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial \eta}, \quad \dot{\eta} = -\frac{\partial H}{\partial z} \quad (17)$$

where H is the pseudo-Hamiltonian function

$$\begin{aligned} H(x, p, u) &= \langle \eta, F_0(z) \rangle + \sum_{i=1}^3 u_i \langle \eta, F_i(z) \rangle + \eta^0 \left(\sum_{i=1}^3 u_i^2 \right) \\ &= H_0(z, \eta) + \sum_{i=1}^3 u_i H_i(z, \eta) + \eta^0 \left(\sum_{i=1}^3 u_i^2 \right) \end{aligned} \quad (18)$$

and η^0 is a non-positive constant. Moreover, the optimal control u^* satisfies the maximization condition

$$H(z, \eta, u^*) = \max_{v \in \mathbb{R}^3} H(z, \eta, v) \quad (19)$$

that involves $H_i = -2p^0 u_i$. In the normal case $p^0 \neq 0$, one can normalize p^0 to $-1/2$ which gives $H_i = u_i$ so that, substituting in 18, H becomes the true Hamiltonian

$$H_r(z, \eta) = H_0(z, \eta) + \frac{1}{2}(\eta_4^2 + \eta_5^2 + \eta_6^2) \quad (20)$$

and equation 17 can be written

$$(\dot{z}, \dot{\eta}) = \overrightarrow{H_r}(z, \eta) \quad (21)$$

where $\overrightarrow{H_r}$ is the Hamiltonian vectorfield associated with H_r . Finally, the following final transversality condition

$$\eta(t_f) \perp T_{z(t_f)} W_\alpha^u(S_h^3). \quad (22)$$

has to be fulfilled. Note that the final conditions $z(t_f) \in W_+^u(S_h^3)$ and $\eta(t_f) \perp T_{z(t_f)}W_+^u(S_h^3)$ can be written $\gamma(z(t_f), \eta(t_f)) = 0$ where the function γ is defined by

$$\gamma : x \in \mathbb{R}^{12} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 - \alpha \\ x_4 \\ \frac{\omega_1}{2}(x_2^2 + x_4^2) + \frac{\omega_2}{2}(x_3^2 + x_6^2) - h \\ \langle (x_7, \dots, x_{12}), h_1 \rangle \\ \langle (x_7, \dots, x_{12}), h_2 \rangle \\ \langle (x_7, \dots, x_{12}), h_3 \rangle \end{pmatrix} \quad (23)$$

and the family $\{h_1, h_2, h_3\}$ spans the 3-dimensional tangent space $T_{z(t_f)}W_\alpha^u(S_h^3)$. The Maximum principle is a necessary optimality condition and to get a necessary sufficient one we have to introduce the notion of conjugate time, see [6]. Consider a smooth manifold M of dimension n and an Hamiltonian system $\dot{z} = \vec{H}(z(t))$ where $z = (q, p) \in T^*M$ is written in local coordinates. The variational equation

$$\delta z(t) = d\vec{H}(z) \cdot \delta z(t) \quad (24)$$

is called the **Jacobi equation** along z . One calls a **Jacobi field** a nontrivial solution $J(t) = (\delta q(t), \delta p(t))$ of the Jacobi equation along z and it is said to be **vertical** at time t if $\delta q(t) = 0$. A time t_c is said to be **geometrically conjugate** if there exists a Jacobi field vertical at 0 and t_c . In which case, $q(t_c)$, is said to be **conjugate** to $q(0)$. In order to give a geometric characterization of conjugate times, let us define the so-called exponential mapping. Let be $q_0 \in M$. For each $t \in [0, t_f]$, one defines the **exponential mapping** by

$$\exp_{q_0, t} : p_0 \longrightarrow q(t, q_0, p_0)$$

where $z(t, q_0, p_0) = (q(t, q_0, p_0), p(t, q_0, p_0))$ is the unique trajectory of \vec{H} satisfying $z(0, q_0, p_0) = (q_0, p_0)$. Let $\exp_t(\vec{H})$ be the flow of \vec{H} . The following proposition results from a geometrical interpretation of the Jacobi equation [6]. Let be $q_0 \in M$, $L_0 = T_{q_0}^*M$ and $L_t = \exp_t(\vec{H})(L_0)$. Then L_t is a Lagrangian submanifold of T^*M whose tangent space is spanned by Jacobi fields starting from L_0 . Moreover $q(t_c)$ is geometrically conjugate to q_0 if and only if \exp_{q_0, t_c} is not an immersion at p_0 . Under generic assumptions, the following theorem connects the notion of conjugate time and the local optimality of extremals, see [7, 1, 12]. Let t_c^1 be the first conjugate time along z . The trajectory $q(\cdot)$ is locally optimal on $[0, t_c^1]$ in L^∞ topology; if $t > t_c^1$ then $q(\cdot)$ is not locally optimal on $[0, t]$. When the final target is a regular submanifold M_1 , the notion of conjugate time is generalized as follows and the theorem 4 still holds. Denote $M_1^\perp = \{(q, p), q \in M_1, p \perp T_q M_1\}$. Then a time $t_{\text{foc}} \in [0, T]$ is said to be a **focal time** if there exists a Jacobi field $J = (\delta q, \delta p)$ such that $\delta q(t_{\text{foc}}) = 0$ et $J(t_{\text{foc}})$ is tangent to M_1^\perp . Therefore, evaluating the local optimality of an extremal curve consists in comparing the transfer time and the first conjugate time along the extremal.

The numeric methods we use to compute energy-minimal trajectories from $W_\alpha^s(S_h^3)$ to $W_\alpha^u(S_h^3)$ are implemented in the COTCOT, see [6]. Fixing an initial condition z_0 and integrating numerically the Hamiltonian vectorfield \vec{H}_r , we can, using a Newton-type algorithm, find a zero of the following shooting function

$$S : \eta_0 \rightarrow \gamma(z(t_f, z_0, \eta_0))$$

α	0.05	0.6	1.5
t_f	0.524	0.996	1.4
t_{foc}^1	no focal time in $[0, 2t_f]$	1.6	no focal time in $[0, 2t_f]$

Table 1: Comparison between t_f t_{foc}^1 (spatial problem time unit) along extremals.

and henceforth compute an extremal curve solution of the Maximum principle. We initialize the Newton algorithm thanks to the initial adjoint vector η_0^* corresponding to the optimal trajectory in the linearized case which is numerically computed following the method described in the section 3. Since the target $W_\alpha^u(S_h^3)$ is a 3-dimensional submanifold of R^6 , the first focal point is evaluated integrating backward the derivative \overrightarrow{H}_r . The submanifold $W_\alpha^u(S_h^3)^\perp$ being 6-dimensional in R^6 , so is the tangent space $T_{z(t_f), \eta(t_f)} W_\alpha^u(S_h^3)^\perp$. We consequently consider the 6-dimensional vector space spanned by the Jacobi fields $J_i(t) = (\delta z_i, \delta \eta_i)$ for $i=1, \dots, 6$ such that $T_{z(t_f), \eta(t_f)} W_\alpha^u(S_h^3)^\perp = \text{Span}\{J_i(0), 1 \leq i \leq 6\}$. A time t is then a focal time if $\text{rank}(\delta z_1(-t), \delta z_6(-t))$ is lower than or equal to 5.

In the numerical computations we perform, the spacecraft's mass is assumed to be 350 kg, μ is set to 0.012153, h is set to 1.58 and we make the parameter α vary in order to evaluate how far the invariant manifolds structure extends. In figures 2 and 3 are respectively displayed the projections on the plq1-plane of the energy minimal extremal trajectories (where the axes are tilted by 45 degrees to be coherent with figures from [9]) and the norm of the corresponding extremal control for different values of α . In figure 1, the transfer time and the first focal time corresponding to the same values of α are compared.

Our numerical results show the efficiency of initializing the simple shooting method using the initial adjoint vector η_0^* corresponding to the linear case. We thus compute extremal trajectories, whose local optimality is ensured by the second order condition, from $W_\alpha^s(S_h^3)$ to $W_\alpha^u(S_h^3)$ for values of α higher than 1.5. Note that this threshold, sending back in the initial restricted 3-body coordinates, approximatively corresponds to 80 percent of the distance from the collinear point L_1 to the Moon. Expressing the norm of extremal control in units of force, we can deduce from figure 3 that the maximal thrust needed to reach the unstable manifold from the stable one is contained between 0.4 and 0.1 Newton. It appears in figure 2 that, as we expected, the free dynamics in the invariant manifolds plays an important role in energy-minimal transfers in the Earth-Moon system. Indeed, the bigger is α , the longer the spacecraft follows the stable manifold before reaching the instable one; however bigger seems to be the maximal thrust because of the closeness with L_1 .

Let us point out that, for a fixed value of α , we can, in a certain extent, reduce the maximal thrust needed to achieve the transfer by making the transfer time t_f increase. In figure 4, we display the evolution of the norm of the extremal control for different values of t_f and $\alpha = 1$. However, computations show that when the transfer time is too long, the condition $t_f < t_{\text{foc}}^1$ is no more satisfied so that extremal trajectories lose their optimality.

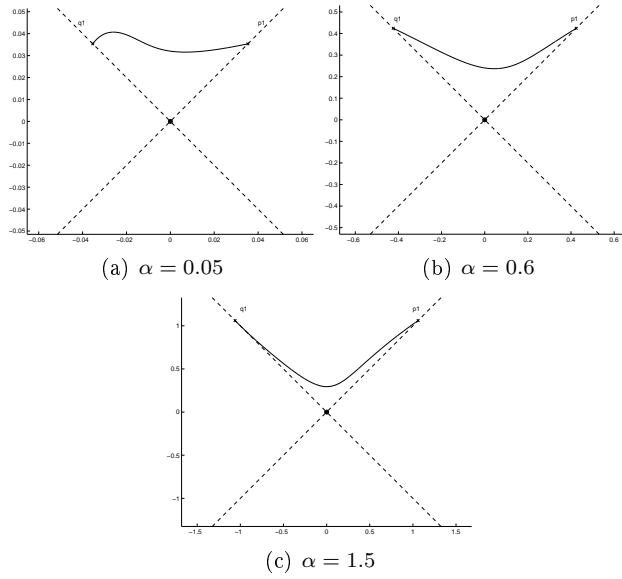


Figure 2: Projections of energy-minimal trajectories on the p_1q_1 -plane (axes tilted 45°).

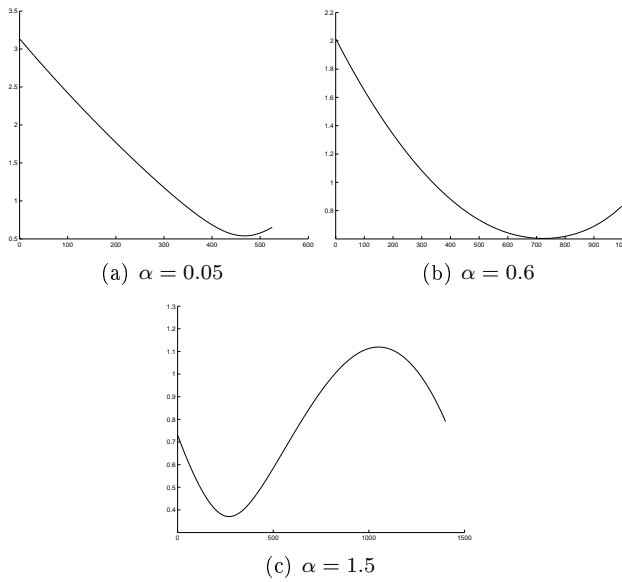


Figure 3: Norm of extremal controls.

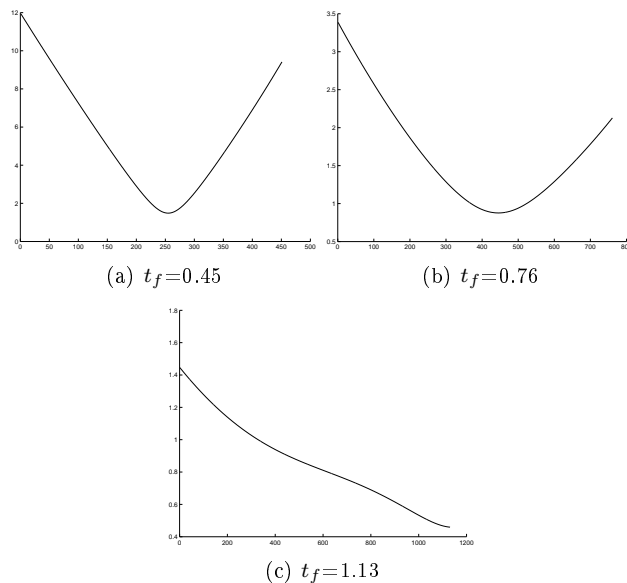


Figure 4: Norm of extremal control corresponding to different transfer times for $\alpha=1$.

5 Conclusion

Basing on previous studies concerning dynamics in the restricted 3-body problem, we provide in this article an efficient procedure for initializing a numeric indirect method in optimal control and computing energy-minimal transfers in the vicinity of the Lagrangian point L_1 . We show that, from the optimal control theory point of view, invariant manifolds in the equilibrium region play an important role for envisioning transfers from the Earth's gravity area to the Moon's gravity one. Besides, this work is a good example of a powerful application of geometric control theory combined with numerics methods.

Acknowledgments

The author thanks Pr. B. Bonnard and Pr. J.B. Caillau from the Mathematics Institute of the Bourgogne University for their help and advices.

References

- [1] A.A. Agrachev and A.V. Sarychev, *On abnormal extremals for Lagrange variational problem*, Math. Syst. Estim. Cont., **8** (1998), 87–118.
- [2] J.T. Betts and S.O. Erb, *Optimal low thrust trajectories to the Moon*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst., **2** (2003), 144–170.

- [3] A. Bombrun, J. Chetboun and J-B Pomet, *Transfert Terre-Lune en poussée faible par contrôle feedback – La mission SMART-1*, (French) INRIA Research report, **5955** (2006), 1–27.
- [4] B. Bonnard, J.B. Caillau and G. Picot *Geometric and numerical techniques in optimal control of the two and three body problems*, Commun. Inf. Syst, **10** (2010), to appear.
- [5] B. Bonnard, J.-B. Caillau and E. Trélat, *Second order optimality conditions in the smooth case and applications in optimal control*, ESAIM Control Optim. and Calc. Var., **13** (2007), 207–236.
- [6] B. Bonnard, J.-B. Caillau and E. Trélat, *COTCOT: short reference manual*, ENSEEIHT-IRIT Technical report RT/APO/05/1, (2005).
- [7] B. Bonnard and I. Kupka, *Théorie des singularités de l'application entrée/sortie et optimalité des trajectoires singulières dans le problème du temps minimal*, (French)[Theory of the singularities of the input/output mapping and optimality of singular trajectories in the minimal-time problem], Forum Math., **2** (1998), 111–159.
- [8] (MR1301779) E.B. Lee and L. Markus, "Foundations of optimal control theory" Reprint edition, Krieger, 1986.
- [9] G. Gomez, W.S. Koon, M.W. Lo, J.E. Marsden, J. Masdemont and S.D. Ross *Connecting orbits and invariant manifolds in the spatial three-body problem*, Nonlinearity, **17** (2004), 1571–1606.
- [10] (MR1301779) L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze and E. F. Mishchenko, "The mathematical theory of optimal processes" John Wiley & Sons, New York, 1962.
- [11] G. Racca, B. H. Foing and M. Coradini, *SMART-1: The first time of Europe to the Moon*, Earth, Moon and planets, **85-86** (2001), 379–390.
- [12] A.V. Sarychev, *The index of second variation of a control system*, Matem. Sbornik, **113** (1980), 464–486.
- [13] V. Szebehely, "Theory of orbits: The restricted problem of three bodies," Academic Press, 1967.

Conclusion

La contribution principale de cette thèse est de fournir plusieurs collections de trajectoires à temps minimal et énergie minimale au sein du système Terre-Lune, modélisé par le problème des trois corps restreint et ce dans un contexte de poussée faible. Nous calculons ces trajectoires au moyen de méthodes numériques sophistiquées, inspirées de la théorie du contrôle géométrique, dont l'efficacité dépend de l'estimation précise des conditions initiales appropriées. La complexité de ce problème est en outre augmentée du fait des dimensions importantes des espaces dans lesquels nous avons été amenés à travailler, qui sont respectivement \mathbb{R}^8 et \mathbb{R}^{12} selon que l'on étudie le problème plan ou spatial. Nous surmontons ces difficultés en utilisant pertinemment des méthodes homotopiques fondées sur une analyse de la géométrie de chaque problème. Cette approche permet de déterminer des transferts optimaux contrôlés par des poussées inférieures à $8e - 2$ Newton. Nous fournissons ainsi les premiers exemples de trajectoires optimales dans le problème, encore relativement méconnu, des trois corps restreint, calculées à l'aide de méthodes indirectes fondées sur la notion de solutions extrémales issues du principe du maximum de Pontryagin. En ce sens, nous proposons une approche complémentaire aux travaux de Marsden & al. et Simó & al. en étudiant numériquement la réduction du coût des transferts orbitaux dans le problème des trois corps restreint, non plus du point de vue de la théorie des systèmes dynamiques mais de celle du contrôle optimal. Nous illustrons d'ailleurs le rôle crucial joué par la structure de variété invariante pour minimiser le coût énergétique lors des transferts autour du point L_1 . Dans le cas du problème de minimisation de l'énergie, les trajectoires peuvent être comparées à celles obtenues par "recollement" des trajectoires optimales associées au problème des deux corps dont les centres du champ de gravité sont la Terre puis la Lune, via une solution optimale du système linéarisé au voisinage du point d'équilibre L_1 que l'on peut calculer explicitement. La technique de moyennation offre, sur un long intervalle de temps, une excellente approximation du transfert à énergie minimale entre deux orbites du problème de Kepler, lorsque l'une d'entre elle est circulaire. On obtient de cette manière une trajectoire entre l'orbite géostationnaire et l'orbite circulaire centrée sur la Lune.

Le recours à la moyennation, dans le but de calculer analytiquement des trajectoires à énergie minimale par le biais d'un recollement, est ici essentiellement introduit en guise d'ouverture à un travail futur. Bien que nous ayons procédé à une implémentation numérique de cette méthode, une étude géométrique fine doit être menée pour juger de l'optimalité globale des transferts obtenus de la sorte. L'application du principe du maximum avec contrainte doit être envisagée pour cela. Les conditions assurant la continuité de l'état adjoint dans le

contexte d'un système de contrôle discontinu sont également dignes d'intérêt. De plus, cette comparaison n'est malheureusement pas encore possible dans le cas de la minimisation du temps de transfert. Une étude géométrique du Hamiltonien moyenné associé au problème de temps minimal doit préalablement être réalisée pour permettre d'envisager une telle expérimentation numérique. Notons que la question de la contrôlabilité dans le modèle restreints des trois corps n'a pas été abordée au cours de ce travail, bien qu'elle représente un enjeu considérable pour l'analyse de la dynamique contrôlée du problème. Elle s'érige par conséquent comme l'une des principales contributions théoriques à apporter. De même, l'étude de la maximisation de la masse finale du satellite et de la minimisation du coût L^1 le long du transfert ont été volontairement éludées, dans la mesure où elle constitue un des socles de la thèse de Bilel Daoud, voir [22], menée à l'université de Bourgogne sous la direction de Jean-Baptiste Caillau en parallèle à ce travail. Enfin, il serait intéressant de prendre en considération l'utilisation d'une méthode de tir multiple inspirée de travaux d'applications des méthodes numériques pour la résolution de problèmes de contrôle optimal tels que [42].

Bibliographie

- [1] A.A. Agrachev and A.V. Sarychev. On abnormal extremals for Lagrange variational problem. *J. Math. Syst. Estim. Cont.* **8** (1998), 87-118.
- [2] E.L. Allgower and K. Georg. *Numerical continuation methods, an introduction*. Springer, Berlin, 1990.
- [3] G. Archambeau. *Etude de la dynamique autour des points de Lagrange*. Ph.D thesis, Université Paris-Sud XI, Paris, France, 2008.
- [4] V. I. Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics*. Springer, New-York, 1989.
- [5] M. Audin. *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité*. Cours spécialisés, SMF et EDP-sciences, 2001.
- [6] J.T. Betts and S.O. Erb. *Optimal low thrust trajectories to the Moon*. SIAM J. Appl. Dyn. Syst., **2** (2003), 144–170.
- [7] G. A. Bliss. *Lectures on the Calculus of Variations*. Chicago, 1946.
- [8] A. Bombrun. *Les transerts orbitaux à poussée faible-Optimalité et stabilisation*. PhD thesis, Ecole des mines de Paris, Paris, France, 2007.
- [9] A. Bombrun, J. Chetboun and J.-B. Pomet. Transfert Terre-Lune en poussée faible par contrôle feedback – La mission SMART-1. *INRIA Research report* (2006), no. 5955, 1–27.
- [10] B. Bonnard, J.B. Caillau and G. Picot. *Geometric and numerical techniques in optimal control of the two and three body problems*, Commun. Inf. Syst, **10** (2010), to appear.
- [11] B. Bonnard, J.-B. Caillau and E. Trélat. Second order optimality conditions in the smooth case and applications in optimal control. *ESAIM Control Optim. and Calc. Var.* **13** (2007), no. 2, 207-236 (apo.enseeiht.fr/cotcot).
- [12] B. Bonnard, J.-B. Caillau and E. Trélat. Geometric optimal control of elliptic Keplerian orbits. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* **5** (2005), no. 4, 929-956.
- [13] B. Bonnard and M. Chyba. *Singular trajectories and their role in control theory*. Math. and Applications 40, Springer, 2003.
- [14] B. Bonnard, L.Faubourg and E. Trélat. *Mécanique céleste et contrôle des véhicules spatiaux*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [15] B. Bonnard and G. Janin. Geometric orbital transfer using averaging techniques. *J. Dyn. Control Syst* **14**, **2** (2008), no. 2, 145-167.
- [16] B. Bonnard and I. Kupka. Théorie des singularités de l'application entrée/sortie et optimalité des trajectoires singulières dans le problème du

- temps minimal. (French) [Theory of the singularities of the input/output mapping and optimality of singular trajectories in the minimal-time problem] *Forum Math.* **5** (1993), no. 2, 111-159.
- [17] B. Bonnard, N. Shcherbakova and D. Sugny. The smooth continuation method in optimal control with an application to control systems. *ESAIM Control Optim. and Calc. Var.*, to appear.
- [18] J.-B. Caillau. *Contribution à l'étude du contrôle en temps minimal des transferts orbitaux*. Phd thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, Toulouse, France, 2000.
- [19] J.-B. Caillau, B. Daoud and J. Gergaud. On some Riemannian aspects of two and three-body controlled problems. *Recent Advances in Optimization and its Applications in Engineering*, Springer, to appear. Proceedings of the 14th Belgian-French-German Conference on Optimization, Leuven, September 2009.
- [20] J.-B. Caillau, B. Daoud and J. Gergaud, *Discrete and differential homotopy in circular restricted three-body control*, submitted to *AIMS proceedings* Proceedings of the 8th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Dresden, May 2010.
- [21] C. C. Conley. Low energy transit orbits in the restricted three-body problem. *SIAM J. Appl. Math.* **16** (1968), 732-746.
- [22] B. Daoud. Contrôle L^1 min du problème restreint des trois corps. *ENSEEIH-IRIT Tech. Report* (20010), no. RT-APO-10-09.
- [23] R. Dujol. *Contribution à l'étude du contrôle optimal des transferts orbitaux mono-entrée*. Phd thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, Toulouse, France, 2006.
- [24] J. Gergaud and J T. Haberkorn. Homotopy method for minimum consumption orbit transfer problem. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **12** (2006), no. 2, 294-310.
- [25] G. Gomez, W.S. Koon, M.W. Lo, J.E. Marsden, J. Madsen and S.D. Ross. Connecting orbits and invariant manifolds in the spatial three-body problem. *Nonlinearity*, **17** (2004), 1571-1606.
- [26] G. Gómez, A. Jorba , J. Madesmont and C. Simò. *Dynamics and mission design near libration points. Vol III. Advanced methods or collinear points*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2001.
- [27] G. Gómez, A. Jorba , J. Madesmont and C. Simò. *Dynamics and mission design near libration points. Vol VI. Advanced methods or triangular points*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2001.
- [28] G. Gómez, S.Koon, M. Lo, J.E Marsden, J. Madesmont and S.D. Ross. Invariants manifolds, the spatial three-body problem ans space mission design. *Adv. Astronaut. Sci* **109** (2001), 3-22.
- [29] G. Gómez, S.Koon, M. Lo, J.E Marsden, J. Madesmont and S.D. Ross. Connecting orbits ans invariant manifolds in the spatial restricted three-body problem. *Nonlinearity* **17** 1571-1606.
- [30] G. Gómez, J. Llibre , R. Martínez and C. Simò. *Dynamics and mission design near libration points. Vol I. Fundamentals : the case of collinear libration points*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2001.

- [31] G. Gómez, J. Llibre, R. Martínez and C. Simò. *Dynamics and mission design near libration points. Vol II. Fundamentals : the case of triangular libration points*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2001.
- [32] M. Guerra and A. Sarychev, Existence and Lipschitzian regularity for relaxed minimizers. *Mathematical control theory and finance*, 231-250, Springer, Berlin, 2008.
- [33] T. Haberkorn. *Transfert orbital à poussée faible avec minimisation de la consommation : résolution par homotopie différentielle*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, Toulouse, France, 2004.
- [34] P. Hartman. *Ordinary differential equations*. Second edition, Birkhäuser, 1982.
- [35] A. Jorba. A methodology for the numerical computation of normal forms, centre manifolds and first integrals of hamiltonian systems, *Experiment. Math.* **8** **2** (1999), 155–195.
- [36] A. Jorba and J. Masdemont. Dynamics in the center manifold of the collinear points of the restricted three-body problem. *Phys. D* **132** (1999), 189–213.
- [37] W. S. Koon, M. W. Lo, J. E. Marsden and S. D. Ross, Dynamical system, the three-body problem and space mission design. *Proc. Equadiff99, Berlin, German* (1999).
- [38] W. S. Koon, M. W. Lo, J. E. Marsden and S. D. Ross, Heteroclinic connections between periodic orbits and resonance transitions in celestial mechanics. *Chaos* **10** (2000), 427–469.
- [39] W. S. Koon, M. W. Lo, J. E. Marsden and S. D. Ross, Low energy transfer to the Moon. dynamics of natural and artificial celestial bodies (Poznan 2000). *Celestial. Mech. Dynam. Astronom.* **81** (2001) 27–38.
- [40] W. S. Koon, M. W. Lo, J. E. Marsden and S. D. Ross, Constructing a low energy transfer between Jovian moons. *Contemp. Math. Am. Math. Soc* **292** 129–145.
- [41] W. S. Koon, M. W. Lo, J. E. Marsden and S. D. Ross, Dynamical systems, the Three-Body problem, and space mission design. Springer, 2007.
- [42] B. Kugelmann and H.J. Pesch, New general guidance method in constrained optimal control. 1 Numerical method. *J. Optim. Theory Appl.* **67** **3** (1990) 421–435.
- [43] E.B. Lee and L. Markus. *Fundations of optimal control theory* Reprint edition, Krieger, 1986.
- [44] C. Marchall. *The Three-Body problem*, Elsevier, Amsterdam 1990.
- [45] J.-P. Marec. *Optimal space trajectories*. Elsevier, Amsterdam, 1979.
- [46] J.E. Marsden and S.D. Ross. New methods in celestial mechanics and mission design. *Bull. Amer. Math. Soc (N.S)* **43** (2006), no. 1, 43–73.
- [47] P. Martinon. *Résolution numérique de problème de contrôle optimal par une méthode homotopique simpliciale*. Phd thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, Toulouse, France, 2005.
- [48] R. P. McGehee. Some homoclinic orbits for the restricted three-body problem. *PhD Thesis* Université du Wisconsin, 1969.

- [49] K. Meyer and G. R. Hall. *Introduction to hamiltonian dynamical systems and the N-body problem*. Springer, New York, 1992.
- [50] I. Newton. *Principes mathématiques de la philosophie naturelle. Tome I,II (French)*. Traduction de la marquise du Chastellet, augmentée des commentaires de Clairaut, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris, 1966.
- [51] G. Picot, *Shooting and numerical continuation method for computing time-minimal and energy-minimal trajectories in the Earth-Moon system using low-propulsion*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, submitted.
- [52] G. Picot, *Energy minimal transfers in the vicinity of the Lagrangian point L_1* , submitted to *AIMS proceedings* Proceedings of the 8th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Dresden, May 2010.
- [53] H. Poincaré, *Oeuvres*, Gauthier-Villars, Paris, 1934.
- [54] H. Pollard. *Mathematical introduction to celestial mechanics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966.
- [55] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze and E. F. Mishchenko. *The mathematical theory of optimal processes*. John Wiley & Sons, New York, 1962.
- [56] A.V. Sarychev. The index of second variation of a control system. *Matem. Sbornik* 113 (1980) 464-486. English transl. in :*Matem. USSR Sbornik* 41, 1982, 383-401.
- [57] G. Racca, B. H. Foing and M. Coradini. SMART-1 : The first time of Europe to the Moon. *Earth, Moon and planets* **85-86** (2001), 379-390.
- [58] G. Racca *et al.*. SMART-1 mission description and development status. *Planetary and space science* **50** (2002), 1323-1337.
- [59] C. Simó. *Dynamical systems methods for space missions on a vicinity of colinear libration points*. In Simó C., editor, *Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom (S'Agaró, 1995)*, volume 533 of NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., pages 223–241, Dordrecht. kluwer Acad. Publ., 1999.
- [60] V. Szebehely. *Theory of orbits : The restricted problem of three bodies*. Academic Press, 1967.
- [61] E. Trélat. *Contrôle optimal théorie & applications*. Vuibert, 2005.
- [62] L.T. Watson. A globally convergent algorithm for computing fixing points of C^2 maps, *Applied Math. Comput.* (1979) **5** 297–311
- [63] O. Zarrouati. *Trajectoires spatiales*. CNES-Cepadues, Toulouse, France, 1987.