Calcul de la capacité analytique et fonctions d'Ahlfors rationnelles

Thèse

Malik Younsi

Doctorat en Mathématiques
Philosophiæ doctor (Ph.D.)

Québec, Canada

© Malik Younsi, 2014

Résumé

Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ compact et soit X le complément de K par rapport à la sphère de Riemann, $X := \mathbb{C}_\infty \setminus K$. La *capacité analytique* de K, notée $\gamma(K)$, est définie par

$$\gamma(K) := \sup\{|f'(\infty)| : f \in \mathcal{O}(X, \overline{\mathbb{D}})\},$$

où $\mathcal{O}(X, Y)$ est l'ensemble des fonctions holomorphes de X vers Y et

$$f'(\infty) := \lim_{z\to\infty} z(f(z) - f(\infty))$$

représente le coefficient de $1/z$ dans le développement de Laurent de f au voisinage du point ∞ :

$$f(z) = f(\infty) + \frac{f'(\infty)}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

La capacité analytique des sous-ensembles compacts du plan fut introduite par Ahlfors en 1947 dans le but d'étudier un problème soulevé par Painlevé en 1888 demandant une caractérisation géométrique des sous-ensembles compacts dits *effaçables*. Le problème de Painlevé se révéla fort difficile et il fallut attendre plus d'un siècle avant d'en obtenir une solution satisfaisante, grâce aux travaux de Xavier Tolsa et plusieurs autres.

La présente thèse de doctorat vise à étudier en détail la capacité analytique. Plus précisément, dans la première partie de la thèse, on développe une méthode efficace et rigoureuse pour le calcul numérique de la capacité analytique. Cette méthode est d'autant plus intéressante qu'il est extrêmement difficile en pratique d'estimer la capacité analytique d'un ensemble compact donné. On utilise ensuite cette méthode, implémentée sur ordinateur à l'aide du logiciel MATLAB, pour étudier le célèbre problème de la sous-additivité de la capacité analytique. Ce problème réputé fort difficile fut énoncé en 1967 par Vitushkin et demeure encore à ce jour sans réponse. Plusieurs expérimentations numériques de même que certains des résultats obtenus mènent à la formulation d'une conjecture qui, si démontrée, impliquerait que la capacité analytique est bel et bien sous-additive. Enfin, on démontre la conjecture dans un cas particulier.

La seconde partie de la thèse est dédiée à l'étude des fonctions d'Ahlfors, fonctions extrémales pour le problème de la capacité analytique. Plus précisément, on s'intéresse à un problème soulevé par Jeong et Taniguchi visant à déterminer les fonctions d'Ahlfors qui sont des fonctions

rationnelles. On donne une solution partielle au problème, fournissant ainsi plusieurs nouveaux exemples explicites de fonctions d'Ahlfors et de capacités analytiques.

Table des matières

Résumé iii

Table des matières v

Liste des tableaux vii

Liste des figures ix

Avant-Propos xi

Notation 1

1 Introduction 3

2 Préliminaires 7
2.1 Motivation : compacts effaçables et problème de Painlevé 7
2.2 La capacité analytique : définition et propriétés élémentaires 10

I Calcul de la capacité analytique et problème de la sous-additivité 15

3 Compacts bornés par un nombre fini de courbes de Jordan 17
3.1 Fonction d'Ahlfors et fonction de Garabedian 18
3.2 Comportement sous l'action d'une application conforme 20

4 Estimés pour la capacité analytique 25
4.1 Compacts bornés par des courbes de classe C^∞ 25
4.2 Compacts bornés par des courbes analytiques par morceaux 27

5 Calcul de la capacité analytique 37
5.1 Description de la méthode 37
5.2 Convergence des bornes 38
5.3 Exemples numériques 43

6 Le problème de la sous-additivité 55
6.1 L'approche de Melnikov 56
6.2 Capacité analytique discrète et sous-additivité 57
6.3 Une conjecture reliée au problème de la sous-additivité 61

II Fonctions d'Ahlfors rationnelles **73**

7 Problème de Jeong–Taniguchi et théorème de représentation de Bell **75**
7.1 Restrictions de fonctions rationnelles 75
7.2 Fonctions rationnelles n-good 77
7.3 Applications de Grunsky et représentations de Bell 78

8 Exemples de fonctions d'Ahlfors rationnelles **83**
8.1 Fonctions d'Ahlfors rationnelles admettant une symétrie de réflexion 83
8.2 Fonctions d'Ahlfors rationnelles avec symétrie rotationnelle 86
8.3 Fonctions d'Ahlfors rationnelles de degré 2 88
8.4 Exemples numériques 89

9 Une approche topologique **97**
9.1 Préliminaires sur la convergence au sens de Carathéodory 98
9.2 Représentations de Koebe et topologie de l'ensemble des domaines n-connexes . 98
9.3 Topologie de l'ensemble des fonctions rationnelles n-good 101
9.4 Théorèmes de convergence 103
9.5 Fonctions d'Ahlfors rationnelles 109
9.6 Application aux fonctions d'Ahlfors rationnelles avec résidus positifs 112

10 Conclusion **117**
10.1 Distance de Carathéodory 117
10.2 Calcul de la capacité analytique de fractales 118
10.3 Applications de Grunsky et fonctions d'Ahlfors 118
10.4 Conjecture 6.3.1 pour $n = 3$ 118
10.5 Sous-additivité dans le cas triplement connexe 120
10.6 Une généralisation du problème de la soudure conforme 120
10.7 Capacitabilité 120

Bibliographie **123**

Liste des tableaux

5.1 Bornes inférieures et supérieures pour $\gamma(K)$ pour l'exemple 5.3.1 44
5.2 Bornes inférieures et supérieures pour $\gamma(K)$ pour l'exemple 5.3.2 46
5.3 Bornes inférieures et supérieures pour $\gamma(K)$ pour l'exemple 5.3.3 47
5.4 Bornes inférieures et supérieures pour $\gamma(K)$ pour l'exemple 5.3.4 48
5.5 Bornes inférieures et supérieures pour $\gamma(K)$ 50
5.6 Bornes inférieures et supérieures pour $\gamma(K)$ pour l'exemple 5.3.5 51
5.7 Bornes inférieures et supérieures pour $\gamma(K)$ pour l'exemple 5.3.6 52

8.1 Bornes inférieures et supérieures pour $\gamma(K)$ pour l'exemple 8.4.1 91
8.2 Bornes inférieures et supérieures pour $\gamma(K)$ pour l'exemple 8.4.2 92
8.3 Bornes inférieures et supérieures pour $\gamma(K)$ pour l'exemple 8.4.3 93
8.4 Bornes inférieures et supérieures pour $\gamma(K)$ pour l'exemple 8.4.4 94
8.5 Bornes inférieures et supérieures pour $\gamma(K)$ pour l'exemple 8.4.5 95
8.6 Bornes inférieures et supérieures pour $\gamma(K)$ pour l'exemple 8.4.6 96

Liste des figures

5.1 Le compact K pour l'exemple 5.3.1 43
5.2 Le compact K pour l'exemple 5.3.2 46
5.3 Le compact K pour l'exemple 5.3.3 47
5.4 Le compact K pour l'exemple 5.3.4 48
5.5 Le compact K pour l'exemple 5.3.5 51
5.6 Le compact K pour l'exemple 5.3.6 52

6.1 Le compact $E \cup F$ pour l'exemple 6.3.1 63
6.2 Graphe du rapport $\gamma(E \cup F)/(\gamma(E) + \gamma(F))$ pour l'exemple 6.3.1 63
6.3 Le compact $E \cup F$ pour l'exemple 6.3.2 64
6.4 Graphe du rapport $\gamma(E \cup F)/(\gamma(E) + \gamma(F))$ pour l'exemple 6.3.2 64
6.5 Le compact $E \cup F$ pour l'exemple 6.3.3 65
6.6 Graphe du rapport $\gamma(E \cup F)/(\gamma(E) + \gamma(F))$ pour l'exemple 6.3.3 65
6.7 Le compact $E \cup F$ pour l'exemple 6.3.4 66
6.8 Graphe du rapport $\gamma(E \cup F)/(\gamma(E) + \gamma(F))$ pour l'exemple 6.3.4 66

8.1 La frontière de K pour l'exemple 8.4.1 91
8.2 La frontière de K pour l'exemple 8.4.2 92
8.3 La frontière de K pour l'exemple 8.4.3 93
8.4 La frontière de K pour l'exemple 8.4.4 94
8.5 La frontière de K pour l'exemple 8.4.5 95
8.6 La frontière de K pour l'exemple 8.4.6 96

Avant-propos

Cette thèse représente pour moi l'aboutissement de nombreuses années d'études universitaires ; c'est donc avec une certaine nostalgie que j'écris ces remerciements.

Je tiens d'abord à remercier mon directeur, le professeur Thomas Ransford. Ses judicieux conseils, mathématiques ou non, son écoute ainsi que sa disponibilité exceptionnelle ont été pour moi d'une valeur inestimable. Je le remercie profondément d'avoir été mon mentor tout au long de ces dernières années, que ce soit lors de deux bourses de recherche de premier cycle, de la maîtrise ou encore du doctorat. Je lui suis également redevable pour tous les congrès auxquels il m'a permis de participer ainsi que pour m'avoir soutenu financièrement durant ma dernière année de doctorat.

Ensuite, j'aimerais remercier mon collègue et ami Maxime Fortier Bourque, grâce auquel la deuxième partie de cette thèse a pu prendre forme. Sa passion pour les mathématiques n'a d'égal que son talent, faisant de lui un collaborateur hors du commun.

J'adresse également mes plus sincères remerciements aux professeurs du département de mathématiques et de statistique de l'université Laval qui, tous d'une façon qui leur est propre, m'ont permis de m'épanouir, que ce soit en mathématiques ou non. Je pense entre autres à toutes les tâches d'auxiliaire d'enseignement m'ayant été confiées, ce qui m'a permis de réaliser que, bien qu'ayant passé toutes ces années à étudier, j'aimais tout autant enseigner. Merci donc aux professeur(e)s Line Baribeau, Jean-Marie De Koninck, Claude Lévesque, Hassan Manouzi, Thomas Ransford et Jérémie Rostand, pour m'avoir donné la chance d'être leur auxiliaire d'enseignement. Merci également à Frédéric Gourdeau, pour m'avoir confié à deux reprises une tâche d'enseignement pour le cours Mathématiques de l'ingénieur I, de même qu'à Emmanuelle Reny-Nolin et Jérôme Soucy, pour m'avoir permis de travailler au CDA. Enfin, je remercie également Sylvie Drolet et Michel Lapointe pour leur efficacité remarquable dans la résolution de problèmes administratifs et informatiques, ainsi que Benoît Pouliot pour son aide et ses excellents conseils en ce qui a trait à la partie numérique de ce travail.

Cette thèse n'aurait jamais vu le jour sans le support inconditionnel de ma famille et de mes amis. Je remercie donc de tout coeur Claudia, la femme de ma vie, dont l'amour et le soutien font de moi un homme comblé. J'espère qu'elle saura me pardonner tous ces moments de

distraction typiques des mathématiciens, durant lesquels j'étais présent de corps mais guère d'esprit. Merci également à mes parents, Suzanne et Azza, ainsi qu'à ma soeur Ouanessa, pour leur amour et leur soutien. Merci aussi à ma grand-mère Denise qui a toujours été très fière de moi, même durant ces dernières années plus difficiles où elle tentait tant bien que mal de combattre la maladie d'Alzheimer. Enfin, je ne saurais passer sous silence les merveilleux moments passés à l'université en compagnie de mes amis. Je pense entre autres à toutes les heures de dîner en compagnie de Benoît, Erwan, Patrick et Sophie. Je ne saurais bien entendu relater tous les bons moments passés avec mes autres collègues et amis, mais sachez que j'ai apprécié la compagnie de chacun d'entre vous.

Je tiens également à remercier le professeur Xavier Tolsa, pour son invitation des plus généreuses à lui rendre visite à Barcelone, le professeur Dmitry Khavinson, pour ses excellentes réponses à mes questions sur les classes de Smirnov, ainsi que les professeurs Manuel D. Contreras, Santiago Díaz Madrigal, Luis Rodríguez Piazza et Daniel Girela des universités de Séville et de Málaga pour m'avoir octroyé une bourse de participation au *Doc-Course in Complex Analysis and Related Areas*. Ceci fut sans conteste l'une des expériences les plus enrichissantes de mon doctorat.

Enfin, je remercie le programme de bourses d'études supérieures du Canada Vanier pour leur soutien financier.

À Claudia.

« The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's must be beautiful ; the ideas, like the colors or the words must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test : there is no permanent place in this world for ugly mathematics. »

- *G.H. Hardy (1877-1947).*

Notation

$\mathbb{C}$	Plan complexe
$\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$	Sphère de Riemann
$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert < 1\}$	Disque unité ouvert
$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert = 1\}$	Cercle unité
$\mathbb{D}(z_0, r) := \{z : \lvert z - z_0\rvert < r\}$	Disque ouvert centré en $z_0 \in \mathbb{C}$ de rayon $r > 0$
$\overline{\mathbb{D}}(z_0, r) := \{z : \lvert z - z_0\rvert \leq r\}$	Disque fermé centré en $z_0 \in \mathbb{C}$ de rayon $r > 0$
$\mathcal{O}(X, Y)$	Fonctions holomorphes sur un domaine X à valeurs dans Y
$C^\infty(X)$	Fonctions de classe C^∞ sur le domaine X
$H^\infty(X)$	Fonctions holomorphes et bornées sur X
$A(X)$	Fonctions continues sur $\overline{X}$ et holomorphes sur X
$\lVert f\rVert_{\infty,E} := \sup\{\lvert f(z)\rvert : z \in E\}$	Norme supremum de f sur l'ensemble E.

Chapitre 1

Introduction

Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ compact et soit X le complément de K par rapport à la sphère de Riemann, $X := \mathbb{C}_\infty \setminus K$. La *capacité analytique* de K, notée $\gamma(K)$, est définie par

$$\gamma(K) := \sup\{|f'(\infty)| : f \in \mathcal{O}(X, \overline{\mathbb{D}})\},$$

où $f'(\infty) := \lim_{z\to\infty} z(f(z) - f(\infty))$ représente le coefficient de $1/z$ dans le développement de Laurent de f au voisinage du point ∞ :

$$f(z) = f(\infty) + \frac{f'(\infty)}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

On peut montrer (voir le chapitre 2) que dans le cas où $\gamma(K) > 0$, il existe une unique fonction $f \in \mathcal{O}(X, \overline{\mathbb{D}})$ avec $f'(\infty) = \gamma(K)$, appelée *fonction d'Ahlfors pour* K ou *sur* X.

La capacité analytique des sous-ensembles compacts du plan fut introduite par Ahlfors [1] en 1947, dans le but d'étudier un problème dû à Painlevé sur la caractérisation des singularités enlevables des fonctions holomorphes bornées. Plus précisément, le problème de Painlevé, énoncé par ce dernier en 1888, vise à caractériser géométriquement les ensembles compacts K dits *effaçables*, c'est-à-dire ayant la propriété que toute fonction holomorphe et bornée sur X est constante. Ahlfors observa que les compacts effaçables K sont précisément ceux avec $\gamma(K) = 0$, d'où l'intérêt d'étudier en détail les propriétés de la capacité analytique.

Bien qu'il fallut attendre plus de cent ans avant d'obtenir une solution satisfaisante au problème de Painlevé grâce aux travaux de David [8], Tolsa [44] et plusieurs autres, la théorie de la capacité analytique connut un essor considérable lors du vingtième siècle. Mentionnons entre autres les travaux du mathématicien russe Vitushkin [47], qui observa que la capacité analytique joue un rôle fondamental dans la théorie de l'approximation rationnelle uniforme des fonctions holomorphes. Le lecteur intéressé peut consulter [49] pour un survol détaillé des applications de la capacité analytique à ce type de problème. Comme autre application, mentionnons également les travaux de Murai [30], qui utilisa la capacité analytique en dynamique des fluides pour étudier les champs de vitesse planaires induits par plusieurs obstacles.

La présente thèse a pour but d'étudier en détail la capacité analytique. On présente d'abord au chapitre 2 une description sommaire des résultats concernant le problème de Painlevé, dans le but de donner au lecteur un aperçu de la principale motivation ayant mené à l'introduction du concept de capacité analytique. On donne également la définition de cette dernière et on décrit par la suite ses propriétés élémentaires.

La première partie de la thèse porte sur une nouvelle méthode efficace pour le calcul numérique de la capacité analytique. Plus précisément, on décrit une méthode basée sur un problème de minimisation quadratique permettant d'obtenir des bornes supérieures et inférieures rigoureuses pour la capacité analytique d'ensembles compacts bornés par un nombre fini de courbes de Jordan disjointes de classe C^∞ ou analytiques par morceaux. La méthode est efficace et les bornes inférieures et supérieures obtenues peuvent être arbitrairement proches les unes des autres. Ceci est d'autant plus intéressant qu'il demeure extrêmement difficile en pratique d'estimer la capacité analytique d'un ensemble compact donné.

Le chapitre 3 est consacré aux différents préliminaires sur la capacité analytique de compacts bornés par n courbes de Jordan disjointes. On y présente le théorème d'Ahlfors qui stipule que dans ce cas, la fonction d'Ahlfors f pour K est une application holomorphe propre de degré n de X sur $\mathbb{D}$ qui s'étend à une fonction continue sur $\overline{X}$, dont la restriction à chacune des courbes frontières est un homéomorphisme sur le cercle unité $\mathbb{T}$. On introduit également, dans le cas où chacune des courbes frontières de K est analytique, une fonction intimement liée à la capacité analytique portant le nom de *fonction de Garabedian pour* K. Enfin, on énonce et démontre des résultats sur le comportement des fonctions d'Ahlfors et de Garabedian sous application conforme. Ceci permet entre autres d'obtenir une définition de la fonction de Garabedian pour un ensemble compact borné par des courbes suffisamment régulières mais pas nécessairement analytiques, comme par exemple de classe C^∞.

Le chapitre 4, quant à lui, porte sur deux nouveaux estimés pour la capacité analytique sur lesquels reposent notre méthode pour le calcul numérique de cette dernière. Plus précisément, on démontre d'abord, en utilisant les propriétés de la fonction de Garabedian et de la fonction d'Ahlfors, que la capacité analytique d'un compact borné par un nombre fini de courbes de Jordan disjointes de classe C^∞ peut s'écrire à la fois comme minimum et comme maximum de certaines quantités faisant intervenir la norme L^2 sur la frontière de K. De plus, on identifie précisément les fonctions extrémales. Le reste du chapitre est consacré à la généralisation de ces estimés au cas où la frontière de K est analytique par morceaux. Dans ce cas, les estimés font intervenir les classes E^p dites *de Smirnov* sur des domaines de connectivité finie, dont on donne une présentation sommaire. Les propriétés de la fonction de Garabedian pour K sont ensuite utilisées pour obtenir les estimés voulus.

Le chapitre 5 présente de façon détaillée la méthode pour le calcul numérique de la capacité analytique d'ensembles compacts bornés par des courbes analytiques par morceaux. Dans le

cas où les courbes frontières sont analytiques, le théorème de Mergelyan sur l'approximation rationnelle uniforme a pour conséquence immédiate la convergence des bornes obtenues par la méthode vers la valeur exacte de la capacité analytique. Pour ce qui est de la convergence de la méthode dans le cas où la frontière est analytique par morceaux, celle-ci requiert un théorème de type Mergelyan sur la densité des fonctions rationnelles dans la classe de Smirnov E^2. Enfin, on présente plusieurs exemples numériques afin d'illustrer la méthode. À la lumière des résultats obtenus, il s'avère que cette dernière est très efficace dans le cas où la frontière est analytique mais peu efficace pour des compacts bornés par des courbes analytiques par morceaux. On explique comment modifier la méthode dans cette situation pour obtenir une bonne efficacité. La méthode modifiée est elle aussi illustrée par des exemples numériques.

Enfin, au chapitre 6, on s'intéresse au célèbre problème de la sous-additivité de la capacité analytique :

Est-il vrai que

$$\gamma(E \cup F) \leq \gamma(E) + \gamma(F)$$

pour tous sous-ensembles compacts E, F du plan ? Autrement dit, la capacité analytique est-elle sous-additive ?

Certains indices portent à croire que la réponse est positive, comme par exemple le résultat remarquable de Tolsa [44] stipulant que la capacité analytique est semi-additive, dans le sens qu'il existe une constante universelle C telle que

$$\gamma(E \cup F) \leq C(\gamma(E) + \gamma(F))$$

pour tous sous-ensembles compacts E, F. Toutefois, la question de savoir si l'inégalité est valide avec $C = 1$ demeure encore à ce jour sans réponse. En utilisant une approche discrète à la capacité analytique, on montre que dans l'étude du problème de la sous-additivité, il suffit de considérer des compacts E, F disjoints qui sont des unions finies de disques fermés et disjoints, tous de même rayon. On utilise ensuite la méthode numérique du chapitre 5 pour étudier la sous-additivité dans ce cas particulier, ce qui mène à la formulation d'une conjecture qui, si démontrée, impliquerait que la capacité analytique est bel et bien sous-additive. Enfin, on démontre la conjecture dans un cas particulier.

La seconde partie de la thèse est dédiée à l'étude des fonctions d'Ahlfors rationnelles. Une fonction rationnelle R de degré n est appelée *fonction d'Ahlfors rationnelle* si $R^{-1}(\mathbb{D})$ est un domaine n-connexe contenant le point ∞ et si R est la fonction d'Ahlfors sur $R^{-1}(\mathbb{D})$. On s'intéresse à un problème soulevé par Jeong et Taniguchi [25] visant à déterminer toutes les fonctions d'Ahlfors rationnelles. On étudie ce problème d'abord d'un point de vue analytique, en identifiant explicitement des familles de fonctions d'Ahlfors rationnelles, puis d'un point de vue topologique, en décrivant des propriétés topologiques de l'ensemble des fonctions d'Ahlfors rationnelles de degré fixé.

Plus précisément, le chapitre 7 est consacré aux principaux outils nécessaires par la suite, soit le théorème de représentation de Bell ainsi que le théorème de Bierberbach sur les applications de Grunsky. Le premier de ces résultats a pour conséquence que toute fonction d'Ahlfors sur un domaine n-connexe non dégénéré contenant le point ∞ est conformément équivalente à une fonction d'Ahlfors rationnelle de degré n, d'où l'intérêt d'une étude approfondie du problème de Jeong et Taniguchi. On démontre également l'unicité de la représentation de Bell d'un domaine n-connexe, sous certaines normalisations.

Par la suite, au chapitre 8, on donne une solution partielle au problème de Jeong–Taniguchi en exhibant, pour chaque entier $n \geq 2$, deux familles de fonctions d'Ahlfors rationnelles de degré n, chacune présentant une symétrie particulière. On détermine également toutes les fonctions d'Ahlfors rationnelles de degré 2. Ces résultats fournissent de nouveaux exemples explicites de fonctions d'Ahlfors et donc *a fortiori* de capacités analytiques. Par la suite, on illustre les résultats obtenus avec des exemples numériques, grâce à la méthode pour le calcul numérique de la capacité analytique du chapitre 5. Les différents résultats obtenus de même que la solution du problème de Jeong–Taniguchi en degré 1 et en degré 2 semblent indiquer qu'une fonction rationnelle R de degré n telle que $R(\infty) = 0$ et $R^{-1}(\mathbb{D})$ est n-connexe est une fonction d'Ahlfors rationnelle si tous ses résidus sont positifs. Or, on présente un exemple numérique montrant que la positivité des résidus n'est pas une condition suffisante pour être une fonction d'Ahlfors rationnelle.

Le chapitre 9, dernier chapitre de la thèse, est quant à lui dédié à l'étude des propriétés topologiques de $\mathcal{A}(n)$, l'ensemble des fonctions d'Ahlfors rationnelles de degré n. À l'aide du théorème de représentation de Bell ainsi que de plusieurs théorèmes de convergence de type Carathéodory, on construit un homéomorphisme permettant d'obtenir des propriétés topologiques intéressantes de $\mathcal{A}(n)$. Enfin, comme application, on montre que la positivité des résidus n'est pas non plus une condition nécessaire pour être une fonction d'Ahlfors rationnelle.

Les résultats de la première partie de la thèse ont été obtenus en collaboration avec Thomas Ransford et ont été publiés dans [48]. Ceux de la seconde partie de la thèse sont le fruit d'une collaboration avec Maxime Fortier Bourque et ont été soumis dans [14].

Chapitre 2

Préliminaires

Tout au long de ce chapitre, on utilisera la lettre K pour dénoter un sous-ensemble compact du plan complexe ainsi que la lettre X pour dénoter le complément de K par rapport à la sphère de Riemann, i.e. $X := \mathbb{C}_\infty \setminus K$.

2.1 Motivation : compacts effaçables et problème de Painlevé

Cette section est consacrée à une présentation sommaire du problème de Painlevé, dans le but d'introduire la principale motivation ayant donné naissance au concept de capacité analytique. On se contentera donc de citer les résultats sans démonstration ; le lecteur intéressé pourra consulter [9], par exemple.

La définition suivante tire ses origines du résultat classique généralement attribué à Riemann sur la caractérisation des singularités isolées enlevables des fonctions holomorphes :

Definition 2.1. On dit que K est *effaçable* (*pour les fonctions holomorphes et bornées*) si toute fonction holomorphe et bornée sur X est constante. Autrement dit, K est effaçable si $H^\infty(X)$ ne contient que les fonctions constantes.

Il découle directement du théorème de Riemann mentionné précédemment ainsi que du théorème de Liouville que tout singleton est effaçable, de même que tout ensemble fini. En fait, il s'avère que tout ensemble compact au plus dénombrable est effaçable, ce qui peut être démontré à l'aide du lemme de Zorn et du théorème des catégories de Baire.

En outre, remarquons que si K est effaçable, alors K est d'intérieur vide. En effet, s'il existe un point z_0 appartenant à l'intérieur de K, alors la fonction $z \mapsto 1/(z - z_0)$ est holomorphe, bornée et non constante sur X, entraînant ainsi que K n'est pas effaçable.

En fait, le théorème de représentation conforme de Riemann entraîne que si K est effaçable, alors K est totalement disconnexe, et donc *a fortiori* d'intérieur vide.

La proposition suivante implique l'existence d'ensembles compacts indénombrables et totalement disconnexes, bien qu'effaçables. L'ensemble triadique de Cantor est l'exemple classique par excellence.

Proposition 2.2. *Soit $K \subseteq \mathbb{R}$. Alors K est effaçable si et seulement si $m(K) = 0$, où m est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.*

On peut démontrer l'implication directe en procédant par contradiction et en considérant la transformée de Cauchy

$$f(z) := \int_K \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \qquad (z \in X),$$

qui définit une fonction holomorphe sur X avec $f(z) \to 0$ et $zf(z) \to -m(K) \neq 0$, lorsque $z \to \infty$. En particulier, on déduit que f est non constante. Un calcul simple montre ensuite que la partie imaginaire de f est bornée. Par conséquent, $g(z) := e^{if(z)}$ est une fonction non constante appartenant à $H^\infty(X)$, ce qui contredit l'hypothèse que K est effaçable.

Le résultat suivant, quant à lui, illustre bien à quel point le choix du terme *effaçable* est approprié :

Proposition 2.3. *K est effaçable si et seulement si pour chaque ouvert U contenant K et pour chaque fonction f holomorphe et bornée sur $U \setminus K$, f s'étend à une fonction holomorphe et bornée sur U en entier. De plus, dans ce cas, $\|f\|_{\infty,U} = \|f\|_{\infty,U\setminus K}$.*

Démonstration. La première partie de l'énoncé est une application simple de la formule de Cauchy (voir [13, Proposition 3.5.2] par exemple). La seconde partie de l'énoncé découle directement du fait que si K est effaçable, alors K est d'intérieur vide. □

La Proposition 2.2 fournit une caractérisation élégante des compacts effaçables contenus dans l'axe réel en termes de propriétés géométriques. Le problème suivant, généralement attribué à Painlevé, s'avère donc tout à fait naturel :

Problème 2.4 (Painlevé, 1888)**.** Donner une caractérisation géométrique des sous-ensembles compacts effaçables du plan complexe.

Dans sa thèse de doctorat [32], Painlevé fut le premier à s'intéresser aux compacts effaçables du point de vue de la mesure de Hausdorff. Rappelons que si $E \subseteq \mathbb{C}$, la *mesure de Hausdorff s-dimensionnelle* de E, notée $\mathcal{H}^s(E)$, est définie par

$$\mathcal{H}^s(E) := \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}^s_\delta(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(E),$$

où

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) := \inf \left\{ \sum_n \operatorname{diam}(U_n)^s \right\},$$

l'infimum étant pris sur tout recouvrement de E par une collection dénombrable $\{U_n\}$ de sous-ensembles du plan tel que $0 < \operatorname{diam}(U_n) < \delta$ pour chaque n.

La *dimension de Hausdorff* de E, quant à elle, est dénotée par $\dim_{\mathcal{H}}(E)$ et est définie comme étant l'unique nombre réel positif tel que

$$\mathcal{H}^s(E) = \begin{cases} \infty & \text{si } s < \dim_{\mathcal{H}}(E) \\ 0 & \text{si } s > \dim_{\mathcal{H}}(E). \end{cases}$$

Le résultat suivant, dû à Painlevé, découle essentiellement de la formule de Cauchy :

Théorème 2.5 (Painlevé)**.** *Si $\mathcal{H}^1(K) = 0$, alors K est effaçable.*

Corollaire 2.6. *Si $\dim_{\mathcal{H}}(K) < 1$, alors K est effaçable.*

Inversement, un lemme classique dû à Frostman permet de montrer que tout ensemble compact de dimension de Hausdorff suffisamment grande n'est pas effaçable :

Théorème 2.7. *Si $\dim_{\mathcal{H}}(K) > 1$, alors K n'est pas effaçable.*

Ainsi, la dimension de Hausdorff égale à 1 est la dimension critique en ce qui a trait au problème de Painlevé. À la lumière de ces informations, une interrogation naturelle subsiste : la réciproque du théorème de Painlevé est-elle vraie ? Une réponse positive fournirait une solution satisfaisante au problème de Painlevé. Or, malheureusement, la réponse est non : le premier exemple de compact effaçable K avec $0 < \mathcal{H}^1(K) < \infty$ est dû à Vitushkin (voir par exemple [17, Chapitre 4, Section 3]). Garnett [16] démontra quelques années plus tard que l'ensemble de Cantor planaire 1/4 est également un exemple de compact effaçable de mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^1$ positive.

Dans les années 1960, le mathématicien russe Vitushkin s'intéressa au problème de Painlevé en raison de ses applications à des problèmes d'approximation rationnelle uniforme. C'est ainsi qu'il proposa sous forme de conjecture une solution, du moins pour les compacts de mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle finie :

Conjecture (Vitushkin)**.** Supposons que $\mathcal{H}^1(K) < \infty$. Alors K est effaçable si et seulement si $\mathcal{H}^1(K \cap \Gamma) = 0$ pour toute courbe rectifiable Γ.

Il fallut attendre plusieurs décennies pour que de nouveaux développements remarquables surviennent en ce qui a trait au problème de Painlevé. En 1998, David [8] démontra la conjecture de Vitushkin, donnant ainsi un critère géométrique d'effaçabilité valable uniquement pour les ensembles compacts de mesure de Hausdorff finie. Quelques années plus tard, en 2003, Tolsa obtint un critère d'effaçabilité sans hypothèse sur la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle,

fournissant ainsi une solution définitive au problème de Painlevé. Pour un résumé détaillé de ces différents développements, le lecteur intéressé peut consulter [44] ainsi que [45].

Présenter les travaux remarquables de David, Tolsa et autres sur le problème de Painlevé demeure bien entendu en dehors du cadre du présent ouvrage. Néanmoins, une remarque est de mise en ce qui a trait à un certain outil fondamental sous-jacent à l'ensemble de ces travaux. Comme nous l'avons vu partiellement dans la remarque suivant la Proposition 2.2, la transformée de Cauchy demeure un outil fort utile dans l'étude de problèmes reliés aux compacts effaçables. On verra dans les chapitres subséquents que celle-ci intervient de façon récurrente dans l'étude de la capacité analytique. Ceci explique notamment pourquoi les classes de Smirnov E^p du chapitre 4 se révèlent beaucoup mieux adaptées à l'étude de la capacité analytique que la classe $H^\infty(X)$ et ce, même si cette dernière apparaît directement dans la définition.

2.2 La capacité analytique : définition et propriétés élémentaires

Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ compact et soit $X := \mathbb{C}_\infty \setminus K$.

Definition 2.8. La *capacité analytique* de K est définie par

$$\gamma(K) := \sup\{|f'(\infty)| : f \in \mathcal{O}(X, \overline{\mathbb{D}})\}, \tag{2.1}$$

où $f'(\infty) := \lim_{z\to\infty} z(f(z) - f(\infty))$ représente le coefficient de $1/z$ dans le développement de Laurent de f au voisinage du point ∞ :

$$f(z) = f(\infty) + \frac{f'(\infty)}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

Les propriétés suivantes découlent directement de la définition :

Proposition 2.9. *(i) γ est monotone, i.e. $K_1 \subseteq K_2 \Rightarrow \gamma(K_1) \leq \gamma(K_2)$;*

(ii) $\gamma(aK + b) = |a|\gamma(K)$ pour $a, b \in \mathbb{C}$. En particulier, γ est invariante par translation ;

(iii) La capacité analytique de K ne dépend que de la composante connexe non bornée de X. En d'autres mots, si $\hat{K}$ dénote l'union de K et des composantes connexes bornées de X, alors $\gamma(K) = \gamma(\hat{K})$;

(iv) K est effaçable si et seulement si $\gamma(K) = 0$.

Remarque. En vertu de la propriété *(iii)*, on peut toujours supposer que X est connexe, quitte à remplacer K par $\hat{K}$. C'est ce que nous ferons implicitement tout au long de ce travail.

Remarque. La propriété *(iv)* illustre bien l'intérêt d'étudier la capacité analytique. En effet, dans ce nouveau contexe, le problème de Painlevé se traduit par la recherche d'une caractérisation des ensembles compacts de capacité analytique nulle.

Par un argument élémentaire de famille normale, il est facile de montrer que pour chaque compact $K \subseteq \mathbb{C}$, il existe une fonction extrémale pour (2.1), c'est-à-dire une fonction $f \in \mathcal{O}(X, \overline{\mathbb{D}})$ avec $f'(\infty) = \gamma(K)$.

Proposition 2.10. *Supposons que $\gamma(K) > 0$ et soit f une fonction extrémale pour (2.1). Alors $f(\infty) = 0$.*

Démonstration. Supposons que $f(\infty) \neq 0$. Si $|f(\infty)| = 1$, alors f est constante d'après le principe du maximum, contredisant l'hypothèse $\gamma(K) > 0$. Donc $0 < |f(\infty)| < 1$, et dans ce cas la fonction

$$g(z) := \frac{f(z) - f(\infty)}{1 - f(z)\overline{f(\infty)}} \qquad (z \in X)$$

appartient à $\mathcal{O}(X, \overline{\mathbb{D}})$. De plus, $g(\infty) = 0$ et

$$g'(\infty) = \lim_{z\to\infty} zg(z) = \frac{\gamma(K)}{1 - |f(\infty)|^2} > \gamma(K),$$

contredisant ainsi l'extrémalité de f.

□

Proposition 2.11. *Soit $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \dots$ une suite décroissante d'ensembles compacts et soit $K := \cap_n K_n$. Alors*

$$\gamma(K) = \lim_{n\to\infty} \gamma(K_n).$$

Démonstration. Il s'agit encore une fois d'un argument élémentaire de famille normale, voir par exemple [9, Proposition 1.16]. □

Proposition 2.12. *Supposons que $\gamma(K) > 0$. Alors le problème extrémal (2.1) possède une unique solution. Autrement dit, il existe une unique fonction $f \in \mathcal{O}(X, \overline{\mathbb{D}})$ satisfaisant $f'(\infty) = \gamma(K)$.*

Démonstration. L'existence d'une fonction extrémale ayant déjà été établie, il reste à démontrer l'unicité. La preuve élégante suivante est due à Fisher [12].

Soit f, g deux fonctions extrémales et posons $h := (f+g)/2$, $k := (f-g)/2$. Comme $f = h+k$ et $g = h-k$, il suffit de montrer que $k \equiv 0$. Puisque $|f|^2 \leq 1$ et $|g|^2 \leq 1$ sur X, on a que $|h|^2 + |k|^2 \pm 2\operatorname{Re} h\overline{k} \leq 1$. En additionant ces deux inégalités et en divisant par 2, on obtient $|h|^2 + |k|^2 \leq 1$, et donc

$$|h| + \frac{1}{2}|k|^2 \leq |h| + \frac{1}{2}(1 - |h|^2) = |h| + \frac{1}{2}(1 + |h|)(1 - |h|) \leq |h| + (1 - |h|) = 1.$$

Si k n'est pas identiquement nulle, écrivons

$$\frac{1}{2}k^2 = \frac{a_n}{z^n} + \frac{a_{n+1}}{z^{n+1}} + \dots$$

au voisinage du point ∞, où $a_n \neq 0$ et $n \geq 2$, car $k(\infty) = 0$.

Maintenant, soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $\varepsilon |a_n||z|^{n-1} \leq 1$ sur un voisinage V de K, et posons $\widetilde{f} := h + \varepsilon \overline{a_n} z^{n-1} k^2/2$. Alors $\widetilde{f}$ est holomorphe sur X et

$$|\widetilde{f}| \leq |h| + |\varepsilon \overline{a_n} z^{n-1} k^2/2| \leq |h| + \frac{1}{2}|k|^2 \leq 1$$

sur $V \setminus K$, et donc aussi sur X par le principe du maximum. Or,

$$\widetilde{f}'(\infty) = h'(\infty) + \epsilon |a_n|^2 > \gamma(K),$$

une contradiction.

Par conséquent, $k \equiv 0$ et $f \equiv g$.

□

Definition 2.13. Supposons que $\gamma(K) > 0$. L'unique fonction $f \in \mathcal{O}(X, \mathbb{D})$ telle que $f'(\infty) = \gamma(K)$ est appelée *fonction d'Ahlfors pour* K ou *sur* X.

Dans le cas où K est connexe (ou, de façon équivalente, X est simplement connexe), la fonction d'Ahlfors est bien connue :

Proposition 2.14. *Supposons que K est connexe et contient plus d'un point. Soit $h : X \to \mathbb{D}$ l'unique application conforme avec $h(\infty) = 0$ et $h'(\infty) > 0$. Alors h est la fonction d'Ahlfors pour K. De façon équivalente, $\gamma(K) = h'(\infty)$.*

Démonstration. Soit f la fonction d'Ahlfors pour K. Alors clairement $h'(\infty) \leq f'(\infty) = \gamma(K)$. Inversement, remarquons que $f \circ h^{-1}$ envoie $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{D}$ en fixant 0, donc $|f(z)| \leq |h(z)|$ pour chaque $z \in X$, par le lemme de Schwarz. En multipliant cette inégalité par $|z|$ et en laissant $z \to \infty$, on obtient $\gamma(K) = f'(\infty) \leq h'(\infty)$. □

Corollaire 2.15. *Si K est connexe, alors $\gamma(K) = \mathrm{cap}(K)$, où $\mathrm{cap}(K)$ est la capacité logarithmique de K.*

Corollaire 2.16. *La capacité analytique d'un disque $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$ est égale au rayon r, tandis que celle d'un segment $[\alpha, \beta]$ est égale à la longueur du segment divisée par 4.*

Plus généralement, on a :

Théorème 2.17 (Pommerenke [33], 1960)**.** *Soit $K \subseteq \mathbb{R}$ compact. Alors $\gamma(K) = m(K)/4$.*

Démonstration. Voir par exemple [17, Section 6, Chapitre 1]. □

Corollaire 2.18. *Soit $K \subseteq \mathbb{R}$ compact. Définissons*

$$h(z) := \frac{1}{2} \int_K \frac{d\zeta}{z - \zeta} \qquad (z \in X)$$

et

$$f(z) := \frac{e^{h(z)} - 1}{e^{h(z)} + 1} \qquad (z \in X).$$

Alors f est la fonction d'Ahlfors pour K.

Démonstration. Il est facile de vérifier que $|\operatorname{Im}(h(z))| < \pi/2$ pour $z \in X$, et donc $|f(z)| < 1$. De plus, un calcul simple montre que $f'(\infty) = m(K)/4$. La conclusion découle ensuite directement du Théorème 2.17. □

Il s'avère donc que la fonction d'Ahlfors est connue dans le cas où K est connexe et aussi dans le cas où $K \subseteq \mathbb{R}$. Or, en général, il demeure très difficile d'identifier explicitement la fonction d'Ahlfors pour un ensemble compact donné.

Si K est connexe, alors la Proposition 2.14 implique en particulier que la fonction d'Ahlfors pour K, $f : X \to \mathbb{D}$, est surjective. Bien que ceci ne soit pas vrai pour un K général, le théorème suivant affirme que l'image $f(X)$ doit être suffisamment grande dans le disque unité $\mathbb{D}$:

Théorème 2.19 (Havinson, 1961)**.** *Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ compact et soit f la fonction d'Ahlfors pour K. Alors pour chaque $0 < r < 1$, on a*

$$\gamma(\overline{\mathbb{D}}(0, r) \setminus f(X)) = 0.$$

Démonstration. Voir [22] ou encore [12, Théorème 3], pour une preuve plus élémentaire. □

Remarque. La réciproque du Théorème 2.19 est vraie dans le sens que si E est un sous-ensemble compact de $\mathbb{D}$ avec $\gamma(E) = 0$ et $0 \notin E$, alors $E = \mathbb{D} \setminus f(X)$ pour un certain compact K, où $X = \mathbb{C}_\infty \setminus K$ et f est la fonction d'Ahlfors pour K. En effet, il suffit de considérer $K := \phi(E) \cup \overline{\mathbb{D}}$, où $\phi(z) := 1/z$. Alors clairement $\gamma(\phi(E)) = 0$ et donc par la Proposition 2.3, la fonction d'Ahlfors f pour K s'étend analytiquement à $\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}}$, avec $|f| \leq 1$. Il suit que $\gamma(K) \leq \gamma(\overline{\mathbb{D}}) = 1$. L'inégalité inverse découle directement de la monotonicité de la capacité analytique. Ainsi $\gamma(K) = 1$ et f doit être la fonction d'Ahlfors pour $\overline{\mathbb{D}}$, i.e. $f = \phi$. On déduit donc que $f(X) = \phi(X) = \mathbb{D} \setminus E$.

Enfin, on conclut ce chapitre en mentionnant le résultat suivant concernant les zéros de la fonction d'Ahlfors :

Théorème 2.20 (Havinson)**.** *Soit f la fonction d'Ahlfors pour un compact K. Alors les zéros de f dans $\mathbb{C}$ appartiennent à l'enveloppe convexe de la frontière de K.*

Démonstration. Voir [22, Théorème 27]. □

Première partie

Calcul de la capacité analytique et problème de la sous-additivité

Chapitre 3

Compacts bornés par un nombre fini de courbes de Jordan

Tout au long de ce chapitre ainsi que des chapitres subséquents, nous nous intéresserons au cas particulier où K est borné par un nombre fini de courbes de Jordan disjointes. Ce cas particulier suffit pour la plupart des problèmes reliés à la capacité analytique, comme en témoigne la proposition suivante :

Proposition 3.1. *Soit $E \subseteq \mathbb{C}$ compact et soit $\epsilon > 0$. Alors il existe un compact F borné par un nombre fini de courbes de Jordan analytiques et disjointes tel que $E \subseteq F$ et*

$$|\gamma(E) - \gamma(F)| < \epsilon.$$

La preuve nécessite le lemme suivant :

Lemme 3.2. *Soit E un sous-ensemble compact d'un ouvert G. Alors il existe une collection $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ de courbes de Jordan analytiques et disjointes telle que*

(i) pour chaque $a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$,

$$n(\Gamma, a) := \sum_{j=1}^{n} n(\gamma_j, a) \in \{0, 1\},$$

où $n(\gamma_j, a)$ est l'indice de a par rapport à la courbe γ_j ;

(ii) $E \subseteq \operatorname{Int}\Gamma \subseteq G$, où

$$\operatorname{Int}\Gamma := \{a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma : n(\Gamma, a) = 1\}.$$

Démonstration. Voir [7, Proposition 13.1.8] □

On peut maintenant démontrer la Proposition 3.1 :

Démonstration. Par la Proposition 2.11, il existe un $\delta > 0$ tel que si $E_\delta := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, E) < \delta\}$, alors

$$\gamma(E) \leq \gamma(\overline{E_\delta}) \leq \gamma(E) + \epsilon.$$

Maintenant, en vertu du Lemme 3.2, il existe une collection de courbes de Jordan analytiques et disjointes $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ telle que

$$E \subseteq \operatorname{Int} \Gamma \subseteq E_\delta.$$

Posons $F := \overline{\operatorname{Int} \Gamma}$. Alors F est un compact borné par des courbes de Jordan analytiques et disjointes, et

$$\gamma(E) \leq \gamma(F) \leq \gamma(\overline{E_\delta}) \leq \gamma(E) + \epsilon.$$

□

Supposons donc à partir de maintenant que la frontière de K est constituée de n courbes de Jordan mutuellement disjointes, disons $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. Comme précédemment, on dénote par X le complément de K par rapport à $\mathbb{C}_\infty$.

3.1 Fonction d'Ahlfors et fonction de Garabedian

Avec ces hypothèses sur K, la fonction d'Ahlfors possède de très belles propriétés :

Théorème 3.3 (Ahlfors [1], 1947)**.** *Soit f la fonction d'Ahlfors pour K. Alors $f : X \to \mathbb{D}$ est une application holomorphe propre de degré n. De plus, f s'étend continûment à $\overline{X}$ et son extension envoie chacune des courbes γ_j de façon homéomorphe sur $\mathbb{T}$.*

Démonstration. Voir [17, Théorème 4.1] et [31, Chapitre 7, Section 6]. □

Remarquons que si, de plus, chacune des courbes γ_j est analytique, alors f s'étend analytiquement à travers la frontière, en vertu du principe de réflexion de Schwarz.

Corollaire 3.4. *Si $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ sont les zéros de f dans $\mathbb{C}$ répétés selon les multiplicités, alors*

$$\log |f(z)| = -g(z, \infty) - \sum_{j=1}^{n-1} g(z, z_j) \qquad (z \in X), \tag{3.1}$$

où $g(z, \zeta)$ est la fonction de Green pour X avec pôle en ζ.

En particulier,

$$\gamma(K) = \operatorname{cap}(K) e^{-\sum_{j=1}^{n-1} g(z_j, \infty)}. \tag{3.2}$$

Démonstration. Considérons

$$u(z) := \log|f(z)| + g(z,\infty) + \sum_{j=1}^{n-1} g(z,z_j)$$

Alors u est harmonique sur $X \setminus \{\infty, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$. Or, si $1 \leq k \leq n-1$, on a

$$u(z) = \log\frac{|f(z)|}{|z-z_k|^{m_k}} + g(z,\infty) + m_k(g(z,z_k) + \log|z-z_k|) + \sum_{z_j \neq z_k} g(z,z_j),$$

où m_k est la multiplicité du zéro z_k de f, et donc u est harmonique au voisinage de z_k. De même, au voisinage du point ∞, on a

$$u(z) = \log|zf(z)| + (g(z,\infty) - \log|z|) + \sum_{j=1}^{n-1} g(z,z_j),$$

et donc u est en fait harmonique sur X en entier. Or, par le Théorème 3.3, pour chaque $\zeta \in \partial X$, on a que $u(z) \to 0$ lorsque $z \to \zeta$. Par le principe du maximum pour les fonctions harmoniques appliqué à u et $-u$, on déduit que u est identiquement nulle sur X, ce qui termine la démonstration de l'équation (3.1). Pour ce qui est de l'équation (3.2), il suffit d'ajouter $\log|z|$ des deux côtés de l'équation (3.1) puis de laisser $z \to \infty$, pour obtenir

$$\log\gamma(K) = \lim_{z\to\infty}(-g(z,\infty) + \log|z|) - \sum_{j=1}^{n-1} g(\infty,z_j) = \log\operatorname{cap}(K) - \sum_{j=1}^{n-1} g(\infty,z_j).$$

Le résultat découle ensuite directement de la symétrie de la fonction de Green.

□

La preuve du Théorème 3.3 dans [17] repose sur les propriétés de la fonction ψ du théorème suivant, essentiellement dû à Garabedian [15] :

Théorème 3.5. *Supposons que chacune des courbes γ_j est analytique. Alors il existe une fonction $\psi \in A(X)$ qui est l'unique solution au problème extrémal*

$$\int_{\partial X} |\psi(\zeta)||d\zeta| = \inf\left\{\int_{\partial X} |h(\zeta)||d\zeta| : h \in A(X), h(\infty) = \frac{1}{2\pi i}\right\}.$$

De plus, ψ possède les propriétés suivantes :

(i) ψ s'étend analytiquement à travers chacune des courbes γ_j ;

(ii) $\psi(\infty) = 1/2\pi i$;

(iii) ψ représente la fonctionnelle d'évaluation au point ∞, dans le sens que, pour chaque $g \in A(X)$,

$$g'(\infty) = \int_{\partial X} g(\zeta)\psi(\zeta)d\zeta;$$

(iv) $\int_{\partial X} |\psi(\zeta)||d\zeta| = \gamma(K)$;

(v) *L'extension de* ψ *possède un logarithme holomorphe sur* X. *En particulier, il existe une fonction* $q \in A(X)$ *telle que* $q(\infty) = 1$ *et*

$$q(z)^2 = 2\pi i \psi(z) \qquad (z \in \overline{X}).$$

Démonstration. Voir [17, Théorème 4.1]. □

Definition 3.6. La fonction ψ du théorème précédent porte le nom de *fonction de Garabedian pour* K.

3.2 Comportement sous l'action d'une application conforme

Le but de cette section est de décrire précisément comment les fonctions d'Ahlfors et de Garabedian se comportent sous l'action d'une application conforme.

Rappelons que K est un sous-ensemble compact du plan borné par n courbes de Jordan disjointes, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, et que $X = \mathbb{C}_\infty \setminus K$.

Soit $F : X \to \widetilde{X}$ une application conforme avec $F(\infty) = \infty$. Écrivons

$$F(z) = a_1 z + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \ldots$$

au voisinage du point ∞ et dénotons par $\widetilde{K}$ le compact $\mathbb{C}_\infty \setminus \widetilde{X}$. La proposition suivante relie les fonctions d'Ahlfors pour K et $\widetilde{K}$:

Proposition 3.7 (Loi de transformation des fonctions d'Ahlfors)**.** *Soit* $f, \widetilde{f}$ *les fonctions d'Ahlfors pour* K *et* $\widetilde{K}$ *respectivement. Alors*

$$\gamma(K) = \gamma(\widetilde{K})/|a_1|$$

et

$$f = (a_1/|a_1|)(\widetilde{f} \circ F).$$

Démonstration. Remarquons d'abord que $\widetilde{f} \circ F \in \mathcal{O}(X, \overline{\mathbb{D}})$ et donc

$$|(\widetilde{f} \circ F)'(\infty)| \leq \gamma(K).$$

Or, on a

$$(\widetilde{f} \circ F)'(\infty) = \frac{\widetilde{f}'(\infty)}{a_1} = \frac{\gamma(\widetilde{K})}{a_1},$$

et donc

$$\frac{\gamma(\widetilde{K})}{|a_1|} \leq \gamma(K).$$

En appliquant le même argument avec $\widetilde{f} \circ F$ remplacé par $f \circ F^{-1}$, on obtient l'autre inégalité. Enfin, par unicité de la fonction d'Ahlfors, $f = \lambda \widetilde{f} \circ F$ pour une certaine constante unimodulaire λ. Pour que $f'(\infty)$ soit positif, cette constante doit être $a_1/|a_1|$. □

Avant de décrire le comportement de la fonction de Garabedian ψ sous l'action d'une application conforme, il faut d'abord donner une définition précise de cette fonction dans le contexte qui nous intéresse. En effet, rappelons qu'en vertu du Théorème 3.5, la fonction de Garabedian n'est définie *a priori* que pour des compacts bornés par des courbes analytiques. Or, en appliquant à répétition le théorème de Riemann, on montre facilement que tout domaine non dégénéré de connectivité n est conformément équivalent à un domaine borné par n courbes de Jordan analytiques et disjointes. Ainsi, il existe un compact $\widetilde{K}$, borné par n courbes de Jordan analytiques et disjointes, et une application conforme $F : X \to \widetilde{X}$ avec $F(\infty) = \infty$, où $\widetilde{X} := \mathbb{C}_\infty \setminus \widetilde{K}$. On peut donc utiliser la fonction de Garabedian pour $\widetilde{K}$ pour définir la fonction de Garabedian pour K, préservant ainsi les propriétés du Théorème 3.5.

Il est bien connu que toute application conforme d'un domaine de Jordan sur le disque unité s'étend à un homéomorphisme de la fermeture du domaine sur le disque unité fermé. Ainsi, par construction, F s'étend à un homéomorphisme de $\overline{X}$ sur $\overline{\widetilde{X}}$ (En fait, ceci demeure vrai pour toute application conforme entre deux domaines bornés par un nombre fini de courbes de Jordan, en vertu de [7, Théorème 15.3.4]).

Dans le but de définir la fonction de Garabedian pour K, on aura besoin d'une hypothèse supplémentaire sur les courbes $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$.

Plus précisément, on supposera que $F \in C^\infty(\overline{X})$. Ce sera le cas si chacune des courbes frontières de K est de classe C^∞ ; il s'agit d'une conséquence du théorème suivant, démontré par Painlevé dans sa thèse de doctorat.

Théorème 3.8 (Painlevé)**.** *Soit D un domaine de Jordan borné par une courbe de classe C^∞ et soit $f : D \to \mathbb{D}$ conforme. Alors $f \in C^\infty(\overline{D})$, la dérivée f' ne s'annule pas sur $\overline{D}$ et $f^{-1} \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}})$.*

Démonstration. Pour une preuve, voir par exemple [3, Théorème 8.2]. □

On aura également besoin du fait que F' possède une racine carrée holomorphe sur X. Ceci est une conséquence immédiate du résultat suivant :

Théorème 3.9 (Bell)**.** *Soit $F : X \to Y$ une application conforme entre deux domaines bornés par un nombre fini de courbes de Jordan disjointes de classe C^∞. Alors $F \in C^\infty(\overline{X})$ et $F' \neq 0$ sur $\overline{X}$. Par conséquent, $F^{-1} \in C^\infty(\overline{Y})$. Enfin, F' est le carré d'une fonction de classe C^∞ sur $\overline{X}$ et holomorphe sur X.*

Démonstration. Voir [3, Théorème 12.1]. □

On peut maintenant démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.10. *Supposons que chacune des courbes γ_j est de classe C^∞ et soit $\widetilde{X}$, $F : X \to \widetilde{X}$, tels que définis précédemment. Soit $\widetilde{\psi}$ la fonction de Garabedian pour le compact $\widetilde{K}$, comme dans le Théorème 3.5. Définissons une fonction ψ sur X par*

$$\psi := \frac{1}{a_1}(\widetilde{\psi} \circ F)F',$$

où

$$F(z) = a_1 z + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots$$

au voisinage du point ∞. Alors ψ possède les propriétés suivantes :

(i) $\psi \in A(X)$;

(ii) $\psi(\infty) = 1/2\pi i$;

(iii) ψ *représente la fonctionnelle d'évaluation au point ∞, dans le sens que pour chaque $g \in A(X)$,*

$$g'(\infty) = \int_{\partial X} g(\zeta)\psi(\zeta)d\zeta;$$

(iv) $\int_{\partial X} |\psi(\zeta)||d\zeta| = \gamma(K)$;

(v) ψ *possède une racine carrée holomorphe sur X. Plus précisément, il existe une fonction $q \in A(X)$ avec $q(\infty) = 1$ telle que*

$$q(z)^2 = 2\pi i\psi(z) \qquad (z \in \overline{X}).$$

Démonstration. L'énoncé (i) découle directement du Théorème 3.5 et de la remarque qui précède le Théorème 3.8. En fait, $\psi \in C^\infty(\overline{X})$.

Pour démontrer (ii), notons que

$$F'(z) = a_1 - \frac{a_{-1}}{z^2} - \frac{2a_{-2}}{z^3} - \dots$$

au voisinage du point ∞, et donc $F'(z) \to a_1$ lorsque $z \to \infty$. Puisque F fixe le point ∞, on a

$$(\widetilde{\psi} \circ F)(\infty) = \widetilde{\psi}(\infty) = \frac{1}{2\pi i}.$$

Pour (iii), on utilise le théorème de changement de variable que l'on retrouve par exemple dans [37, Théorème 7.26]. Soit $g \in A(X)$. Alors $g \circ F^{-1} \in A(\widetilde{X})$ et donc, par le Théorème 3.5,

$$
\begin{aligned}
(g \circ F^{-1})'(\infty) &= \int_{\partial \widetilde{X}} g(F^{-1}(w))\widetilde{\psi}(w)dw \\
&= \int_{\partial X} g(z)\widetilde{\psi}(F(z))F'(z)dz \\
&= a_1 \int_{\partial X} g(z)\psi(z)dz,
\end{aligned}
$$

où l'on a utilisé le changement de variable $w = F(z)$ (rappelons que F est injective et de classe C^∞ sur ∂X). Maintenant, écrivons

$$
g(z) = g(\infty) + \frac{g'(\infty)}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots
$$

au voisinage du point ∞. Alors

$$
(g \circ F^{-1})'(\infty) = \lim_{w \to \infty} w(g(F^{-1}(w)) - g(\infty)) = a_1 g'(\infty),
$$

ce qui complète la démonstration de (iii).

Pour (iv), remarquons que

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial X} |\psi(z)||dz| &= \frac{1}{|a_1|} \int_{\partial X} |\widetilde{\psi}(F(z))||F'(z)dz| \\
&= \frac{1}{|a_1|} \int_{\partial \widetilde{X}} |\widetilde{\psi}(w)||dw| \\
&= \frac{\gamma(\widetilde{K})}{|a_1|} = \gamma(K),
\end{aligned}
$$

en vertu de la Proposition 3.7. Enfin, l'énoncé (v) découle directement du Théorème 3.5 et du Théorème 3.9.

□

Conformément à la terminologie adoptée précédemment dans le cas où la frontière de K est analytique, on fera à l'avenir référence à ψ comme étant la fonction de Garabedian pour K.

Remarque. La fonction de Garabedian fut étudiée par Garnett [17] et Havinson [22], qui soulevèrent tous deux la question suivante :

Est-il vrai que les fonctions de Garabedian d'une suite décroissante de sous-ensembles compacts bornés par des courbes analytiques convergent ?

Smith [41] et Suita [42] donnèrent indépendamment une réponse positive. Ceci fournit une définition naturelle de la fonction de Garabedian pour un sous-ensemble compact arbitraire du plan complexe, bien qu'une telle généralité ne sera pas nécessaire pour la suite.

Chapitre 4

Estimés pour la capacité analytique

4.1 Compacts bornés par des courbes de classe C^∞

Dans cette section, on obtient des estimés pour la capacité analytique de sous-ensembles compacts du plan bornés par un nombre fini de courbes de Jordan disjointes de classe C^∞.

Supposons donc que K est un tel ensemble et rappelons que $X = \mathbb{C}_\infty \setminus K$.

On aura besoin du lemme suivant :

Lemme 4.1. *Soit $f \in A(X)$. Alors*

$$f'(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial X} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Démonstration. Écrivons

$$f(z) = f(\infty) + \frac{f'(\infty)}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

au voisinage du point ∞. Soit C un cercle centré à l'origine, de rayon suffisamment grand pour que K soit contenu dans l'intérieur de C et que l'expression pour f ci-dessus soit valide sur C. Alors on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial X} f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) d\zeta.$$

En effet, il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème de Cauchy dans le cas où f est holomorphe sur un voisinage de $\overline{X}$ et de telles fonctions sont uniformément denses dans $A(X)$, en vertu du théorème de Mergelyan.

D'autre part, le côté droit de l'égalité précédente est tout simplement $f'(\infty)$, ce qui découle directement d'une intégration terme à terme après avoir substitué le développement de Laurent de f dans l'intégrale. □

Le résultat suivant donne deux estimés pour la capacité analytique de K :

Théorème 4.2. *Avec les mêmes hypothèses sur K, on a :*

$$\gamma(K) = \min\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\partial X}|g(z)|^2|dz| : g \in A(X),\, g(\infty) = 1\right\} \tag{4.1}$$

et

$$\gamma(K) = \max\left\{2\mathrm{Re}\, h'(\infty) - \frac{1}{2\pi}\int_{\partial X}|h(z)|^2|dz| : h \in A(X),\, h(\infty) = 0\right\}. \tag{4.2}$$

Le minimum et le maximum sont atteints respectivement par les fonctions $g = q$ et $h = fq$, où f est la fonction d'Ahlfors pour K et q est la fonction du Théorème 3.10.

L'estimé (4.1) est dû à Garabedian [15] dans le cas particulier où K est borné par des courbes analytiques, d'où l'appellation *dualité de Garabedian* que l'on retrouve dans la littérature. Cette dualité fut également étudiée par Havinson [22] pour des ensembles compacts plus généraux.

Démonstration. Soit f la fonction d'Ahlfors sur X, de sorte que $f \in A(X)$ avec $f(\infty) = 0$, $|f| \equiv 1$ sur ∂X et $f'(\infty) = \gamma(K)$. Soit ψ la fonction de Garabedian pour K, dans le sens du Théorème 3.10, et dénotons par q la fonction appartenant à $A(X)$ qui satisfait $q(\infty) = 1$ et

$$q(z)^2 = 2\pi i\psi(z) \qquad (z \in \overline{X}).$$

Pour démontrer (4.1), soit $g \in A(X)$ avec $g(\infty) = 1$. Par le Lemme 4.1, on a

$$\gamma(K) = f'(\infty) = (fg^2)'(\infty) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial X} f(z)g(z)^2 dz.$$

Ainsi,

$$\gamma(K) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\partial X}|f(z)||g(z)|^2|dz| = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial X}|g(z)|^2|dz|.$$

En prenant le minimum sur les telles fonctions g, on obtient

$$\gamma(K) \leq \inf\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\partial X}|g(z)|^2|dz| : g \in A(X), g(\infty) = 1\right\}. \tag{4.3}$$

Inversement, posons $g := q$. Alors $g \in A(X)$, $g(\infty) = 1$ et

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial X}|g(z)|^2|dz| = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial X}|q(z)|^2|dz| = \int_{\partial X}|\psi(z)||dz| = \gamma(K),$$

par le Théorème 3.10. En combinant ceci avec l'inégalité (4.3), on obtient (4.1).

Pour démontrer (4.2), considérons la fonction $h := fq$. Alors $h \in A(X)$, $h(\infty) = 0$ et

$$2\mathrm{Re}\, h'(\infty) - \frac{1}{2\pi}\int_{\partial X}|h(z)|^2|dz| = 2\gamma(K) - \gamma(K) = \gamma(K).$$

Ainsi,

$$\max\left\{2\mathrm{Re}\, h'(\infty) - \frac{1}{2\pi}\int_{\partial X}|h(z)|^2|dz| : h \in A(X), h(\infty) = 0\right\} \geq \gamma(K). \tag{4.4}$$

Inversement, soit $h \in A(X)$ avec $h(\infty) = 0$. Dénotons par $T(z)$ le vecteur tangent à ∂X en z, c'est-à-dire $dz = T(z)|dz|$ avec $|T| \equiv 1$. Adoptons la notation $\langle h_1, h_2 \rangle := \int_{\partial X} h_1(z)\overline{h_2(z)}|dz|$ et $\|h\|_2^2 := \langle h, h \rangle$. Alors

$$0 \leq \frac{1}{2\pi}\|h - i\overline{qT}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\|h\|_2^2 + \frac{1}{2\pi}\|q\|_2^2 + 2\mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi}\langle h, -i\overline{qT}\rangle,$$

et donc

$$0 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\partial X} |h(z)|^2|dz| + \gamma(K) - 2\mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial X} h(z)q(z)dz.$$

Par le Lemme 4.1 encore une fois, on obtient

$$0 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\partial X} |h(z)|^2|dz| + \gamma(K) - 2\mathrm{Re}\,(hq)'(\infty).$$

Or, puisque $q(\infty) = 1$ et $h(\infty) = 0$, on a que $(hq)'(\infty) = h'(\infty)$ et donc

$$\gamma(K) \geq 2\mathrm{Re}\,h'(\infty) - \frac{1}{2\pi}\int_{\partial X} |h(z)|^2|dz|.$$

En combinant ceci avec l'inégalité (4.4), on obtient (4.2).

□

4.2 Compacts bornés par des courbes analytiques par morceaux

Le but de cette section est de généraliser les estimés du Théorème 4.2 à un second cas intéressant, celui des sous-ensembles compacts du plan bornés par des courbes analytiques par morceaux.

Supposons donc que K est un tel ensemble. Autrement dit, la frontière de K consiste en un nombre fini de courbes de Jordan disjointes, et chaque courbe est l'union d'un nombre fini d'arcs analytiques. On suppose également que chaque paire d'arcs analytiques consécutifs se rencontre en un coin conformément équivalent à un secteur. Plus précisément, on suppose que si deux arcs analytiques s'intersectent en w, alors il existe une application conforme définie sur un voisinage V de w qui envoie $V \cap X$ sur un secteur de la forme $\{re^{i\theta} : 0 < r < 1,\ 0 < \theta < \alpha\}$, où $0 < \alpha < 2\pi$.

Les estimés du Théorème 4.2 reposent sur le fait que les fonctions q et fq s'étendent continûment à $\overline{X}$, où f est la fonction d'Ahlfors pour K et q est la racine carrée de $2\pi i$ fois la fonction de Garabedian ψ. Dans le cas où la frontière est analytique par morceaux, ceci demeure vrai pour la fonction d'Ahlfors f, mais pas pour la fonction de Garabedian. En effet, ψ possède des discontinuités en l'ensemble fini de points, disons E, où la frontière n'est pas lisse (E est constitué des points de rencontre entre chaque paire d'arcs analytiques consécutifs). À la lumière de ces informations, dans le but de généraliser les estimés du Théorème 4.2, on doit

inévitablement remplacer $A(X)$ par une plus grande classe de fonctions holomorphes sur X contenant les fonctions q et fq. Il s'avère que les classes de Smirnov sont précisément ce dont on a besoin.

4.2.1 Classes de Smirnov sur des domaines de connectivité finie

Cette sous-section constitue une présentation sommaire de la théorie des classes de Smirnov E^p sur des domaines de connectivité finie. Pour de plus amples détails, le lecteur intéressé peut consulter [10, Chapitre 10], [40], [46] ainsi que l'appendice dans [23, p.57–61].

Tout au long de cette sous-section, on supposera que X est un domaine n-connexe borné à frontière rectifiable. Cela signifie que $\mathbb{C} \setminus X$ possède n composantes connexes, chacune bornée par une courbe de Jordan rectifiable. Dénotons par $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ ces courbes rectifiables, où Γ_1 est la courbe frontière de la composante non bornée de $\mathbb{C} \setminus X$.

Definition 4.3. Soit $1 \leq p < \infty$. On dit qu'une fonction f appartient à la *classe de Smirnov* $E^p(X)$ si f est holomorphe sur X et s'il existe une suite (X_k) de sous-domaines de X n-connexes à frontière C_k rectifiable telle que

(i) pour chaque sous-ensemble compact $K \subseteq X$, il existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K \subseteq X_k$ pour tout $k \geq k_0$;

(ii) $\limsup_{k\to\infty} \int_{C_k} |f(z)|^p |dz| < \infty$.

Remarquons qu'*a priori*, il n'est pas clair d'après la définition que si $f, g \in E^p(X)$, alors $f + g \in E^p(X)$, puisque la suite (X_k) peut dépendre de la fonction considérée. Or, dans le cas où X est simplement connexe du moins, il suffit en fait de considérer les courbes de niveau d'une application conforme :

Théorème 4.4. *Supposons que $n = 1$. Alors X est un domaine de Jordan ; soit donc $\phi : \mathbb{D} \to X$ conforme et considérons les courbes de niveau*

$$\Gamma_r := \phi(\{|z| = r\}) \qquad (0 < r < 1).$$

Alors pour chaque $f \in E^p(X)$, on a

$$\sup_{0<r<1} \int_{\Gamma_r} |f(z)|^p |dz| < \infty.$$

Démonstration. [10, Théorème 10.1] □

Corollaire 4.5. *Dans le cas $n = 1$, $E^p(X)$ est un espace vectoriel.*

Démonstration. Cela découle directement du Théorème 4.4. □

Le prochain théorème relie le cas général au cas simplement connexe :

Théorème 4.6 (Théorème de décomposition)**.** *Pour $1 \leq j \leq n$, soit X_j la composante connexe de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Gamma_j$ contenant X. Soit $1 \leq p < \infty$ et soit $f \in E^p(X)$. Alors f peut être décomposée de façon unique comme*

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) \qquad (z \in X),$$

où chaque f_j appartient à $E^p(X_j)$ et $f_j(\infty) = 0$ pour $2 \leq j \leq n$.

Démonstration. La preuve est une application simple de la formule de Cauchy, voir par exemple [46]. □

En combinant le théorème de décomposition avec le Théorème 4.4, on obtient facilement les résultats suivants :

Corollaire 4.7. *Pour $1 \leq j \leq n$, soit X_j comme dans le Théorème 4.6. Alors chaque X_j est simplement connexe ; soit donc $\phi_j : \mathbb{D} \to X_j$ conforme et considérons les courbes*

$$\Gamma_{j,r} := \phi_j(\{|z| = r\}) \qquad (0 < r < 1).$$

Soit $1 \leq p < \infty$, soit $f \in E^p(X)$ et soit $\Gamma_r := \cup_{j=1}^n \Gamma_{j,r}$ pour $r \in (r_0, 1)$, où r_0 est tel que pour chaque $r \in (r_0, 1)$, les courbes $\Gamma_{j,r}$ sont mutuellement disjointes et contenues dans X. Alors

$$\sup_{r_0 < r < 1} \int_{\Gamma_r} |f(z)|^p |dz| < \infty.$$

Corollaire 4.8. *Pour tout $1 \leq p < \infty$, $E^p(X)$ est un espace vectoriel.*

Corollaire 4.9. *Pour tout $1 \leq p < \infty$, $A(X) \subseteq E^p(X)$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que si X_j, $\phi_j : \mathbb{D} \to X_j$ et $\Gamma_{j,r}$ sont comme dans le Corollaire 4.7, alors pour chaque j, les longueurs des courbes $\Gamma_{j,r}$ sont uniformément bornées. En effet, notons que la longueur de $\Gamma_{j,r}$ est

$$r \int_0^{2\pi} |\phi_j'(re^{i\theta})| \, d\theta.$$

Or, comme $\partial X_j = \Gamma_j$ est une courbe de Jordan rectifiable, ϕ_j' appartient à l'espace de Hardy $H^1(\mathbb{D})$ (voir [7, Théorème 14.5.8]).

□

Le théorème suivant est l'analogue pour les classes de Smirnov du résultat classique de Fatou concernant les espaces de Hardy du disque unité :

Théorème 4.10. *Soit $1 \leq p < \infty$ et soit $f \in E^p(X)$. Alors*

(i) f possède des valeurs frontières non tangentielles $f^*(\zeta)$ presque partout sur ∂X selon la mesure de longueur d'arc et $f^* \in L^p(\partial X, |d\zeta|)$;

(ii) f est l'intégrale de Cauchy de f^* :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial X} \frac{f^*(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \qquad (z \in X);$$

(iii)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial X} \frac{f^*(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = 0 \qquad (z_0 \notin \overline{X}).$$

Démonstration. Pour démontrer (i) et (ii), il suffit de considérer d'abord le cas simplement connexe, puis d'utiliser le théorème de décomposition pour le cas général. Voir par exemple [10, Théorème 10.3] et [10, Théorème 10.4].

Pour (iii), soit $w \in X$ et $z_0 \notin \overline{X}$. Considérons la fonction

$$h(z) := \frac{(z - w) f(z)}{z - z_0} \qquad (z \in X).$$

Alors clairement $h \in E^p(X)$ et donc par (ii),

$$0 = h(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial X} \frac{h^*(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial X} \frac{f^*(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta.$$

□

Definition 4.11. Soit $1 \leq p < \infty$. On dit qu'une fonction f appartient à l'*espace de Hardy* $H^p(X)$ si f est holomorphe sur X et si la fonction sous-harmonique $|f|^p$ possède un majorant harmonique sur X, c'est-à-dire s'il existe une fonction u harmonique sur X telle que

$$|f(z)|^p \leq u(z) \qquad (z \in X).$$

Il est clair d'après la définition que pour chaque $p \geq 1$, $H^p(X)$ est un espace vectoriel. Aussi, remarquons que $H^p(X) = E^p(X)$ si $X = \mathbb{D}$. Ceci demeure faux en général. En effet, si X est un domaine borné par une courbe de Jordan analytique sauf en un point formant un coin d'angle intérieur $0 < \alpha < 2\pi$, alors $H^p(X) \nsubseteq E^p(X)$ si $0 < \alpha < \pi$, tandis que $E^p(X) \nsubseteq H^p(X)$ si $\pi < \alpha < 2\pi$ (voir [10, Chapitre 10]).

Le théorème suivant est l'analogue du Théorème 4.10 pour l'espace de Hardy :

Théorème 4.12. *Soit $1 \leq p < \infty$ et soit $f \in H^p(X)$. Alors*

(i) f possède des valeurs frontières non tangentielles $f^*(\zeta)$ presque partout sur ∂X par rapport à la mesure harmonique $d\omega$ et $f^* \in L^p(\partial X, d\omega)$;

(ii) f est l'intégrale de Poisson de f^* :

$$f(z) = \int_{\partial X} f^*(\zeta)\, d\omega(\zeta) \qquad (z \in X).$$

Démonstration. Voir [46, Théorème 3.2.1 et Théorème 3.3.2] □

Mentionnons que les espaces de Hardy sont conformément invariants, dans le sens que si $\phi : Y \to X$ est conforme, alors $f \in H^p(X)$ si et seulement si $f \circ \phi \in H^p(Y)$. Pour ce qui est des classes de Smirnov, on a le résultat suivant :

Théorème 4.13 (Keldysch–Lavrentiev)**.** *Soit $\phi : Y \to X$ une application conforme, où Y est un domaine n-connexe à frontière analytique. Soit f une fonction holomorphe sur X. Alors $f \in E^p(X)$ si et seulement si la fonction sous-harmonique $|f \circ \phi|^p|\phi'|$ admet un majorant harmonique sur Y.*

Démonstration. Voir [46, Théorème 3.1.1]. □

Corollaire 4.14. *Si X est borné par des courbes analytiques, alors $H^p(X) = E^p(X)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.*

Une autre conséquence du théorème de Keldysh-Lavrentiev est la complétude de $E^p(X)$:

Corollaire 4.15. *Pour $f \in E^p(X)$, définissons*

$$\|f\|_p := \left(\int_{\partial X} |f^*(\zeta)|^p |d\zeta| \right)^{1/p}.$$

Alors $(E^p(X), \|f\|_p)$ est un espace de Banach.

Démonstration. Voir l'appendice dans [23], p. 57-61. □

On aura également besoin de la généralisation suivante du Lemme 4.1 :

Corollaire 4.16. *Soit X un domaine n-connexe à frontière rectifiable contenant le point ∞ et soit $h \in E^1(X)$. Alors*

$$h'(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial X} h^*(\zeta) d\zeta.$$

Démonstration. Posons $K = \mathbb{C}_\infty \setminus X$. Quitte à composer par une translation, on peut supposer sans perte de généralité que 0 appartient à l'intérieur de K. Posons $X_0 := \{z : 1/z \in X\}$. Alors X_0 est un domaine borné n-connexe à frontière rectifiable et $0 \in X_0$. Définissons une

fonction h_0 sur X_0 par $h_0(z) = h(1/z)$. On vérifie aisément que $h_0 \in E^1(X_0)$, puisque si Γ_0 est une courbe de Jordan rectifiable dans $X_0 \setminus \{0\}$, alors

$$\int_{\Gamma_0} |h_0(z)||dz| = \int_{\Gamma} |h(w)| \frac{|dw|}{|w|^2},$$

où $\Gamma := \{z : 1/z \in \Gamma_0\}$, et la fonction $w \mapsto 1/w^2$ est bornée sur X. Maintenant, si $g_0(z) := (h_0(z) - h_0(0))/z$, alors $g_0 \in E^1(X_0)$ et donc

$$h'(\infty) = g_0(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial X_0} \frac{h_0^*(z) - h_0(0)}{z^2} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial X_0} \frac{h_0^*(z)}{z^2} dz,$$

où l'on a utilisé le Théorème 4.10. Avec le changement de variable $w = 1/z$, on obtient le résultat voulu. □

4.2.2 Fonction de Garabedian

Retournons maintenant au cas où K est un sous-ensemble compact du plan borné par un nombre fini de courbes de Jordan disjointes et analytiques par morceaux. Les estimés du Théorème 4.2 reposent essentiellement sur l'existence d'une fonction ayant les propriétés (i) à (v) du Théorème 3.10. Or, dans le cas où la frontière n'est pas analytique, la définition de la fonction de Garabedian ψ pose problème. En effet, si l'on procède comme dans le Théorème 3.10 en définissant

$$\psi := \frac{1}{a_1} (\widetilde{\psi} \circ F) F',$$

alors $\psi \notin A(X)$. Le premier facteur est bel et bien continu sur $\overline{X}$ mais pas le second : F' est singulière en chacun des points de rencontre entre les arcs analytiques de la frontière de K ; autrement dit, en chacun des points de E. Cependant, F s'étend analytiquement à travers chacun des arcs analytiques de la frontière et donc ψ est continue sur $\overline{X} \setminus E$.

Le prochain résultat est l'analogue du Théorème 3.10 dans le cas qui nous intéresse. Rappelons que $\widetilde{X} = \mathbb{C}_\infty \setminus \widetilde{K}$, où $\widetilde{K}$ est un compact borné par des courbes analytiques, et que $F : X \to \widetilde{X}$ est une application conforme dont le développement au voisinage du point ∞ est de la forme

$$F(z) = a_1 z + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots$$

avec $a_1 \neq 0$.

Théorème 4.17. *Soit $\widetilde{\psi}$ la fonction de Garabedian pour $\widetilde{K}$. Définissons une fonction ψ sur X par*

$$\psi := \frac{1}{a_1} (\widetilde{\psi} \circ F) F'.$$

Alors ψ est une fonction de Garabedian pour K, dans le sens que

(i) ψ est holomorphe sur X et continue sur $\overline{X} \setminus E$;

(ii) $\psi(\infty) = 1/2\pi i$;

(iii) ψ *représente la fonctionnelle d'évaluation au point* ∞*, dans le sens que pour chaque* $g \in A(X)$*,*

$$g'(\infty) = \int_{\partial X} g(\zeta)\psi(\zeta)d\zeta;$$

(iv) $\int_{\partial X} |\psi(\zeta)||d\zeta| = \gamma(K)$ *;*

(v) ψ *possède un logarithme holomorphe. En particulier, il existe une fonction* q *holomorphe sur* X *et continue sur* $\overline{X} \setminus E$ *avec* $q(\infty) = 1$ *telle que*

$$q(z)^2 = 2\pi i\psi(z) \qquad (z \in \overline{X} \setminus E);$$

(vi) $\psi \in E^1(X)$*. De façon équivalente,* $q \in E^2(X)$*.*

Pour la preuve, on aura besoin du lemme suivant, analogue du Théorème 3.9 :

Lemme 4.18. *Soit* $X, \widetilde{X}$ *et* $F : X \to \widetilde{X}$ *comme précédemment. Alors* F' *possède un logarithme holomorphe sur* X*. Plus précisément, il existe une fonction* h *holomorphe sur* X *et continue sur* $\overline{X} \setminus E$ *telle que*

$$F'(z) = e^{h(z)} \qquad (z \in \overline{X} \setminus E).$$

Démonstration. Montrons d'abord la première partie de l'énoncé.

Soit n le nombre de courbes bornant le compact K. Rappelons que par construction, F est la composition de n applications conformes de Riemann, disons

$$F = \phi_1 \circ \phi_2 \circ \cdots \circ \phi_n,$$

où chaque ϕ_j envoie un certain domaine de Jordan non borné sur $\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}}$, avec $\phi_j(\infty) = \infty$. Montrons par induction sur n que F' possède un logarithme holomorphe sur X.

Considérons d'abord le cas $n = 1$. Alors X est un domaine de Jordan borné par une courbe analytique par morceaux et F est une application conforme de X sur $\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Quitte à translater X, on peut supposer que $0 \notin \overline{X}$. Posons $X_0 := \{z : 1/z \in X\}$ et définissons

$$G(z) := \frac{1}{F(1/z)} \qquad (z \in X_0).$$

Alors G est une application conforme du domaine de Jordan borné X_0 sur $\mathbb{D}$, avec $G(0) = 0$. On a

$$G'(z) = \frac{F'(1/z)}{z^2 F(1/z)^2} \qquad (z \in X_0)$$

et donc

$$F'(1/z) = z^2 F(1/z)^2 G'(z) := H(z) \qquad (z \in X_0),$$

où H est holomorphe sur X_0. Remarquons que $H \neq 0$ sur X_0, puisque $z \to F(1/z)$ envoie X_0 sur $\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}}$ et $\lim_{z\to 0} z^2 F(1/z)^2 = a_1^2 \neq 0$. Comme X_0 est simplement connexe, on a que

$H = e^{H_0}$ pour une certaine fonction H_0 holomorphe sur X_0, et donc $F'(z) = e^{H_0(1/z)} := e^{h(z)}$ pour $z \in X$, où h est holomorphe sur X. Ceci complète la preuve dans le cas $n = 1$.

Supposons maintenant que le résultat est vrai pour $n-1$, où $n \geq 2$.

Puisque $F = \phi_1 \circ \phi_2 \circ \cdots \circ \phi_n$, on a

$$F'(z) = \phi_1'((\phi_2 \circ \cdots \circ \phi_n)(z))(\phi_2 \circ \dots \phi_n)'(z)$$

et le résultat découle immédiatement de l'hypothèse d'induction et du cas $n = 1$.

Enfin, la seconde partie de l'énoncé découle directement du principe de réflexion de Schwarz.

□

On peut maintenant démontrer le Théorème 4.17 :

Démonstration. On a déjà mentionné que ψ posséde la propriété (i) et la preuve de (ii) est identique à celle de l'énoncé correspondant du Théorème 3.10. En outre, comme F est dérivable partout sur la frontière sauf en un nombre fini de points, on peut utiliser le théorème de changement de variable que l'on retrouve par exemple dans [37, Théorème 7.26]. On démontre ensuite les énoncés (iii) et (iv) de la même façon que dans la preuve du Théorème 3.10.

L'énoncé (v), quant à lui, découle directement du Théorème 3.5 et du Lemme 4.18.

Pour ce qui est de (vi), comme $\psi := \frac{1}{a_1}(\widetilde{\psi} \circ F)F'$ et $\widetilde{\psi} \circ F$ est bornée sur X, il suffit de montrer que $F' \in E^1(X)$. Ceci découle directement du fait que si C est une courbe de Jordan rectifiable dans X, alors

$$\int_C |F'(z)||dz| = \int_{F(C)} |dw|.$$

□

4.2.3 Preuve des estimés

On a maintenant tous les outils requis pour démontrer le résultat suivant, analogue du Théorème 4.2 :

Théorème 4.19. *Sous les hypothèses précédentes sur K, on a*

$$\gamma(K) = \min\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\partial X} |g^*(z)|^2|dz| : g \in E^2(X),\, g(\infty) = 1\right\}$$

et

$$\gamma(K) = \max\left\{2\mathrm{Re}\, h'(\infty) - \frac{1}{2\pi}\int_{\partial X} |h^*(z)|^2|dz| : h \in E^2(X),\, h(\infty) = 0\right\}.$$

Le minimum et le maximum sont atteints respectivement par les fonctions $g = q$ et $h = fq$, où f est la fonction d'Ahlfors pour K et q est la fonction du Théorème 4.17

Démonstration. La preuve est exactement la même que celle du Théorème 4.2. Il suffit d'utiliser le Théorème 4.17 à la place du Théorème 3.10 ainsi que le Corollaire 4.16 au lieu du Lemme 4.1. □

Remarque. Le premier estimé entraîne l'unicité de la fonction q et, conséquemment, celle de la fonction de Garabedian ψ. En effet, q est l'unique élément de norme minimale dans le sous-ensemble convexe $S := \{g \in E^2(X) : g(\infty) = 1\}$ de l'espace de Hilbert $E^2(X)$.

Remarque. En remplaçant la fonction q dans la preuve du théorème précédent par une racine p-ième holomorphe de $2\pi i\psi$ (dont l'existence est assurée par le Théorème 4.17), on obtient l'identité suivante, valide pour tout $p \geq 1$:

$$\gamma(K) = \min\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\partial X} |g^*(z)|^p |dz| : g^p \in E^1(X),\, g(\infty) = 1\right\}.$$

Chapitre 5

Calcul de la capacité analytique

5.1 Description de la méthode

Dans cette section, on présente une méthode basée sur les estimés des théorèmes 4.2 et 4.19 pour le calcul numérique de la capacité analytique de sous-ensembles compacts K bornés par des courbes de classe C^∞ ou analytiques par morceaux. Cette méthode fournit des bornes inférieures et supérieures rigoureuses pour $\gamma(K)$.

Considérons $A_0(X) := \{f \in A(X) : f(\infty) = 0\}$, où $X = \mathbb{C}_\infty \setminus K$, et soit $\mathcal{F} \subseteq A_0(X)$ un sous-ensemble choisi de sorte que $\operatorname{span} \mathcal{F}$ soit dense dans $A_0(X)$ par rapport à la norme $L^2(\partial X, |d\zeta|)$ définie par

$$\|f\|_2 := \left(\int_{\partial X} |f(\zeta)|^2 |d\zeta| \right)^{1/2}.$$

Un exemple naturel pour $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fonctions de la forme $(z-a)^{-n}$, où $n \in \mathbb{N}$ et a appartient à un certain ensemble S contenant un point dans chaque composante de l'intérieur de K. La densité de $\operatorname{span} \mathcal{F}$ dans $A_0(X)$ est une conséquence du théorème de Mergelyan sur l'approximation uniforme des fonctions holomorphes par des fonctions rationnelles.

Soit $\mathcal{A} := \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ un sous-ensemble fini de $\mathcal{F}$ dont les éléments sont appelés *fonctions d'approximation*.

La méthode permettant d'obtenir des bornes supérieures pour $\gamma(K)$ repose sur le principe suivant :

— Déterminer la fonction g dans le span de $g_1, g_2, \ldots, g_n$ qui minimise la quantité

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial X} |1 + g(z)|^2 |dz|.$$

On obtient ainsi une borne supérieure pour $\gamma(K)$, en vertu des théorèmes 4.2 et 4.19.

Plus précisément, la procédure à suivre est la suivante :

— Poser

$$g(z) := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j g_j(z),$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des nombres complexes à déterminer, et écrire $\alpha_j := c_j + id_j$. Puis, calculer l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial X} |1 + g(z)|^2 |dz|.$$

Ce faisant, on obtient une expression pouvant s'écrire sous la forme $\frac{1}{2}\mathbf{x^T Ax} + \mathbf{bx} + c$, où $\mathbf{x} = (c_1, c_2, \ldots, c_n, d_1, d_2, \ldots, d_n)$, $\mathbf{A}$ est une matrice réelle de taille $2n \times 2n$ symétrique et définie positive, $\mathbf{b}$ est un vecteur réel de longueur $2n$ et c est une constante positive.

— Déterminer les c_j et les d_j minimisant l'expression ci-dessus. Pour ce faire, il suffit de résoudre le système linéaire

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{b} = 0.$$

— Enfin, créer un nouvel ensemble de fonctions d'approximation $\widetilde{\mathcal{A}}$ en ajoutant de nouvelles fonctions de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{A}$, et répéter la procédure avec $\mathcal{A}$ remplacé par $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Cette méthode permet d'obtenir une suite décroissante de bornes supérieures pour $\gamma(K)$. Essentiellement la même procédure fournit une suite croissante de bornes inférieures pour $\gamma(K)$ (il suffit d'utiliser le second estimé dans les théorèmes 4.2 et 4.19).

5.2 Convergence des bornes

Le but de cette section est de montrer que l'on peut s'assurer que les bornes inférieures et supérieures obtenues par la méthode soient arbitrairement proches les unes des autres.

Rappelons d'abord que le minimum et le maximum dans les théorèmes 4.2 et 4.19 sont atteints respectivement par les fonctions q et fq, où f est la fonction d'Ahlfors pour K et q est la racine carrée de $2\pi i$ fois la fonction de Garabedian pour K.

Dans le cas où chacune des courbes frontières est de classe C^∞, ces fonctions s'étendent continûment à la fermeture de X. Conséquemment, par le théorème de Mergelyan, il est possible de les approximer uniformément sur $\overline{X}$ par des fonctions rationnelles avec pôles dans S, où S est un ensemble fixé contenant un point dans chaque composante de l'intérieur de K. D'autre part, le Lemme 4.1 entraîne que si $h, R \in A(X)$ et $|h - R| < \epsilon$ sur ∂X, alors $|R'(\infty) - h'(\infty)| < C\epsilon$, où C est une constante qui dépend uniquement de K. Ainsi, pour chaque $\epsilon > 0$, il existe des fonctions rationnelles R_1, R_2 s'annulant au point ∞ et avec pôles dans S, telles que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial X} |1 + R_1(z)|^2 |dz| - \epsilon \leq \gamma(K) \leq 2\mathrm{Re}\, R_2'(\infty) - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial X} |R_2(z)|^2 |dz| + \epsilon.$$

Ceci démontre la convergence des bornes dans le cas où la frontière est de classe C^∞.

Si la frontière est analytique par morceaux, on a besoin d'un analogue du théorème de Mergelyan pour la classe de Smirnov $E^2(X)$.

Soit donc K un sous-ensemble compact du plan borné par des courbes analytiques par morceaux. Par le Corollaire 4.9, on sait que $A(X) \subseteq E^2(X)$, mais s'agit-il d'un sous-ensemble dense ? Autrement dit, est-ce que toute fonction $h \in E^2(X)$ peut être approximée sur ∂X par une suite de fonctions $(f_n) \subseteq A(X)$, dans le sens que

$$\int_{\partial X} |h^*(z) - f_n(z)|^2 |dz| \to 0$$

lorsque $n \to \infty$?

Il s'avère que la réponse à cette question dépend de la géométrie du domaine en considération. Dans le cas qui nous intéresse, la réponse est positive. Pour le montrer, introduisons d'abord la définition de *domaine de Smirnov* :

Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine de Jordan borné à frontière rectifiable et soit $\phi : \mathbb{D} \to D$ conforme. Dans ce cas, $\phi' \in H^1(\mathbb{D})$ et, puisque cette fonction ne s'annule pas, elle possède une factorisation canonique de la forme

$$\phi'(z) = S(z)Q(z) \qquad (z \in \mathbb{D}),$$

où S est une fonction intérieure singulière et Q, une fonction extérieure.

Definition 5.1. On dit que D est un *domaine de Smirnov* si $S \equiv 1$; autrement dit, si ϕ' est une fonction extérieure.

On peut montrer que cette définition ne dépend pas de la fonction ϕ, mais uniquement du domaine D. Une condition suffisante pour que le domaine D soit un domaine de Smirnov est que $\arg \phi'$ soit borné supérieurement ou inférieurement. Géométriquement, cela signifie que la rotation locale de ϕ est bornée ; *grosso modo*, la courbe frontière ne peut avoir de spirale trop prononcée. En particulier, D est un domaine de Smirnov si ∂D est C^∞ par morceaux. Pour de plus amples détails sur les domaines de Smirnov, le lecteur intéressé peut se référer à [10] ou [34, Chapitre 7].

Definition 5.2. Soit $1 \leq p < \infty$. On dit qu'une fonction $h \in L^p(\partial D)$ appartient à la $L^p(\partial D)$-*fermeture des polynômes* s'il existe une suite (p_n) de polynômes telle que

$$\int_{\partial D} |h(z) - p_n(z)|^p |dz| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

En identifiant chaque fonction de $E^p(D)$ avec ses valeurs frontières, $E^p(D)$ devient un sous-espace fermé de $L^p(\partial D)$ contenant les polynômes et donc aussi leur fermeture. En ce qui concerne l'inclusion inverse, on a :

Théorème 5.3. *$E^p(D)$ coïncide avec la $L^p(\partial D)$-fermeture des polynômes si et seulement si D est un domaine de Smirnov.*

Démonstration. Voir par exemple [10, Théorème 10.6]. □

Le résultat suivant est une généralisation du Théorème 5.3 aux domaines de connectivité finie, du moins dans le cas $p = 2$:

Théorème 5.4. *Soit D un domaine borné dont la frontière consiste en un nombre fini de courbes de Jordan disjointes et analytiques par morceaux, disons $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$. Pour $1 \leq j \leq n$, soit D_j la composante connexe de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Gamma_j$ contenant D. Posons $a_1 := \infty$ et pour $2 \leq j \leq n$, fixons un point a_j dans l'intérieur du complément de D_j. Alors les fonctions rationnelles avec pôles dans l'ensemble $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ sont denses dans $E^2(D)$. Autrement dit, pour chaque fonction $h \in E^2(D)$, il existe une suite $(R_n)_{n\geq 1}$ de fonctions rationnelles avec pôles dans l'ensemble $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ telle que*

$$\int_{\partial D} |h^*(z) - R_n(z)|^2 |dz| \to 0$$

lorsque $n \to \infty$.

Pour la preuve, on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 5.5. *Soit $1 \leq p < \infty$, soit U un domaine de Jordan borné à frontière rectifiable et soit $K \subseteq U$ compact. Alors il existe une constante $M = M(p, K)$ telle que*

$$|g(w)| \leq M \|g^*\|_p$$

pour chaque $w \in K$ et chaque fonction $g \in E^p(U)$, où

$$\|g^*\|_p = \Big(\int_{\partial U} |g^*(z)|^p |dz| \Big)^{1/p}.$$

Démonstration. Le résultat découle directement du Théorème 4.10 et de l'inégalité de Hölder. □

Démonstration (Théorème 5.4). Par le théorème de décomposition (Théorème 4.6), il suffit de montrer que si $h \in E^2(D_j)$, alors il existe une fonction rationnelle R_j ayant un seul pôle, en a_j, telle que l'intégrale

$$\int_{\partial D} |h^*(z) - R_j(z)|^2 |dz|$$

est arbitrairement petite. Soit donc $\epsilon > 0$.

Considérons d'abord le cas $j = 1$, de sorte que $h \in E^2(D_1)$. Comme D_1 est un domaine de Smirnov borné ($\partial D_1 = \Gamma_1$), en appliquant le Théorème 5.3, on déduit l'existence d'un polynôme P_1 tel que

$$\int_{\Gamma_1} |h^*(z) - P_1(z)|^2 |dz| < \epsilon.$$

De plus, comme $h - P_1 \in E^2(D_1)$, le Lemme 5.5 entraîne l'existence d'une constante M dépendant uniquement des courbes $\Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_n$ telle que

$$|h(w) - P_1(w)|^2 \leq M \int_{\Gamma_1} |h^*(z) - P_1(z)|^2 |dz| < M\epsilon \qquad (w \in \Gamma_2 \cup \cdots \cup \Gamma_n).$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} |h^*(z) - P_1(z)|^2 |dz| &= \int_{\Gamma_1} |h^*(z) - P_1(z)|^2 |dz| + \sum_{j=2}^{n} \int_{\Gamma_j} |h(z) - P_1(z)|^2 |dz| \\ &< \epsilon(1 + ML),\end{aligned}$$

où L est la somme des longueurs des courbes $\Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_n$. Puisque le côté droit de l'inégalité ci-dessus peut être arbitrairement petit, ceci complète la preuve dans le cas $j = 1$.

Supposons maintenant que $2 \leq j \leq n$ et soit $h \in E^2(D_j)$. On peut supposer que $h(\infty) = 0$, puisque cela fait partie de la conclusion du théorème de décomposition. Supposons de plus que $a_j = 0$, quitte à translater D_j si nécessaire. Soit $\widetilde{D}_j := \{z : 1/z \in D_j\}$. Alors $\widetilde{D}_j$ est un domaine de Jordan borné dont la frontière est une courbe analytique par morceaux ; en particulier, il s'agit d'un domaine de Smirnov. Définissons une fonction g sur $\widetilde{D}_j$ par $g(z) := h(1/z)$. On vérifie facilement que $g \in E^2(\widetilde{D}_j)$. De plus, $g(0) = 0$, de sorte que la fonction $z \mapsto g(z)/z$ appartient également à $E^2(\widetilde{D}_j)$. D'après le Théorème 5.3,

$$\int_{\partial \widetilde{D}_j} \left| \frac{g^*(z)}{z} - P(z) \right|^2 |dz| < \epsilon$$

pour un certain polynôme P. Après le changement de variable $w = 1/z$, on obtient

$$\int_{\partial D_j} \left| wh^*(w) - P\Big(\frac{1}{w}\Big) \right|^2 \frac{1}{|w|^2} |dw| < \epsilon.$$

Posons $Q(w) := (1/w)P(1/w)$. Alors Q est une fonction rationnelle avec un seul pôle, en 0. L'inégalité ci-dessus devient

$$\int_{\partial D_j} \left| h^*(w) - Q(w) \right|^2 |dw| < \epsilon.$$

Maintenant, par le Lemme 5.5 encore une fois, il existe une constante M dépendant uniquement des courbes Γ_k pour $k \neq j$ telle que

$$\left| \frac{g(z)}{z} - P(z) \right|^2 < M\epsilon$$

pour tout $z \in \widetilde{\Gamma}_k$, $k \neq j$, où $\widetilde{\Gamma}_k := \{w : 1/w \in \Gamma_j\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} |h^*(w) - Q(w)|^2 |dw| &= \int_{\Gamma_j} |h^*(w) - Q(w)|^2 |dw| + \sum_{k \neq j} \int_{\Gamma_k} |h(w) - Q(w)|^2 |dw| \\ &< \epsilon + \sum_{k \neq j} \int_{\widetilde{\Gamma}_k} \left| \frac{g(z)}{z} - P(z) \right|^2 |dz| \\ &< \epsilon + ML'\epsilon = (1 + ML')\epsilon,\end{aligned}$$

où L' est la somme des longueurs des courbes $\widetilde{\Gamma}_k$, $k \neq j$. Comme le côté droit peut être arbitrairement petit, ceci complète la preuve du théorème.

□

Remarque. Le fait que la frontière de D soit analytique par morceaux n'intervient que pour déduire que les domaines D_1 et $\widetilde{D}_j$, pour $2 \leq j \leq n$, sont des domaines de Smirnov. Le résultat demeure donc vrai sous cette hypothèse plus faible.

Retournons maintenant au cas qui nous intéresse, c'est-à-dire celui où K est un sous-ensemble compact du plan borné par n courbes de Jordan analytiques par morceaux, et $X = \mathbb{C}_\infty \setminus K$. Soit D le domaine borné obtenu en ajoutant un cercle extérieur, disons Γ_0, dont le rayon est choisi suffisamment grand pour que K soit contenu dans l'intérieur D_0 de Γ_0. Si $h \in E^2(X)$, alors clairement $h \in E^2(D)$. Le théorème de décomposition permet d'écrire

$$h = h_0 + h_1 + \cdots + h_n$$

où $h_j \in E^2(D_j)$ pour chaque j. Ainsi,

$$h_0 = h - h_1 - \cdots - h_n$$

et donc, puisque h est holomorphe à l'extérieur de K, cela définit une extension holomorphe de h_0 au plan complexe en entier, bornée au voisinage du point ∞. Par le théorème de Liouville, h_0 est constante. Maintenant, comme D est un domaine borné dont la frontière est constituée d'un nombre fini de courbes analytiques par morceaux, on peut appliquer le Théorème 5.4 à h sur ce domaine. Enfin, puisque h_0 est constante, on peut omettre le pôle au point ∞. On obtient donc :

Corollaire 5.6. *Soit K un sous-ensemble compact du plan borné par n courbes de Jordan analytiques par morceaux et soit $X := \mathbb{C}_\infty \setminus K$. Pour chaque $1 \leq j \leq n$, fixons un point a_j à l'intérieur de la j-ième composante connexe de K. Alors les fonctions rationnelles avec pôles dans l'ensemble $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ sont denses dans $E^2(X)$.*

5.3 Exemples numériques

Dans cette section, on présente plusieurs exemples de calcul numérique de la capacité analytique, dans le but d'illustrer la méthode de la section 5.1. Tous les calculs ont été effectués avec le logiciel MATLAB, sur un ordinateur standard.

5.3.1 Compacts bornés par des courbes analytiques

Exemple 5.3.1. *Union de deux disques.*

Dans cet exemple, K est l'union de deux disques de rayon 1 de centre -2 et 2 respectivement.

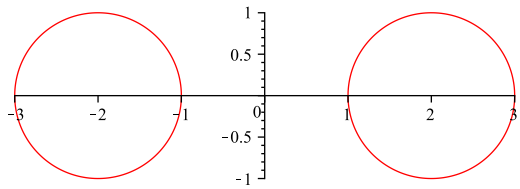

FIGURE 5.1: Le compact K pour l'exemple 5.3.1

Un choix naturel pour les fonctions d'approximation est l'ensemble des puissances de $1/(z-2)$ et de $1/(z+2)$. Or, pour des raisons d'ordre numérique, on utilisera plutôt des fonctions de la forme

$$g_j(z) = \frac{1}{z - a_j},$$

où les a_j sont des points distincts appartenant à l'intérieur de K. Avec ces fonctions, les intégrales intervenant dans la méthode peuvent être calculées analytiquement, grâce au théorème des résidus par exemple. On évite ainsi d'avoir à recourir à des méthodes de quadrature numérique, ce qui résulte en une diminution significative des temps de calcul.

La position des pôles a_j est arbitraire. Typiquement, pour chaque disque centré en c de rayon r, on considère des pôles en les points

$$\{c,\, c \pm r_1,\, c \pm r_1 i,\, c \pm r_2,\, c \pm r_2 i, \ldots, c \pm r_n,\, c \pm r_n i\},$$

où $r_1, \ldots, r_n$ sont également distribués entre 0 et r.

La Table 5.1 ci-dessous contient les bornes pour $\gamma(K)$ obtenues avec la méthode.

TABLE 5.1: Bornes inférieures et supérieures pour $\gamma(K)$ pour l'exemple 5.3.1

Pôles par disque	Borne inférieure pour $\gamma(K)$	Borne supérieure pour $\gamma(K)$	Temps (s)
1	1.875000000000000	1.882812500000000	0.003279
5	1.875593064023693	1.875619764386366	0.007051
9	1.875595017927203	1.875595038756883	0.012397
13	1.875595019096871	1.875595019097141	0.017422
17	1.875595019097112	1.875595019097164	0.027115

Remarquons que dans ce cas particulier, il existe une formule explicite pour $\gamma(K)$. En effet, si

$$K = \overline{\mathbb{D}}(-c, r) \cup \overline{\mathbb{D}}(c, r),$$

où $0 < r < c$, alors on a la formule

$$\gamma(K) = \frac{r}{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{q}} - \sqrt{q}\Big)\vartheta_2(q)^2, \tag{5.1}$$

où ϑ_2 est l'une des fonctions theta de Jacobi :

$$\vartheta_2(q) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{(n+1/2)^2} = 2q^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n})^2,$$

$$\vartheta_3(q) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2,$$

$$\vartheta_4(q) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})^2.$$

L'argument q est donné par la solution dans $(0, 1)$ de l'équation

$$\frac{c}{r} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{q}} + \sqrt{q}\Big).$$

Un calcul élémentaire montre que

$$q = \frac{2c^2 - r^2 - 2c\sqrt{c^2 - r^2}}{r^2}.$$

La formule (5.1) découle facilement de celle de Murai dans [30], en faisant le changement de variable classique

$$k = \frac{\vartheta_2(q)^2}{\vartheta_3(q)^2}$$

et en utilisant les différentes identités reliant les fonctions theta et les intégrales elliptiques. On mentionne néanmoins que, dans la formule pour $\gamma(K)$ dans [30], il y a un facteur c manquant, et la formule correcte est

$$\gamma(K) = \frac{2}{\pi}ckF(k)\tanh\Big(\frac{\pi}{2}\frac{F(\sqrt{1-k^2})}{F(k)}\Big),$$

où F est l'intégrale elliptique complète de première espèce.

Enfin, des manipulations algébriques élémentaires montrent que la formule (5.1) peut s'écrire sous la forme

$$\gamma(K) = \sqrt{c^2 - r^2}\vartheta_2(q)^2.$$

Avec $c = 2$ et $r = 1$, on obtient

$$\gamma(K) \approx 1.8755950190971197289.$$

Le lecteur peut comparer cette valeur avec les résultats numériques de la Table 5.1.

Exemple 5.3.2. *Union de* 25 *disques.* Chacun des disques de la Figure 5.2 a un rayon de 0.4.

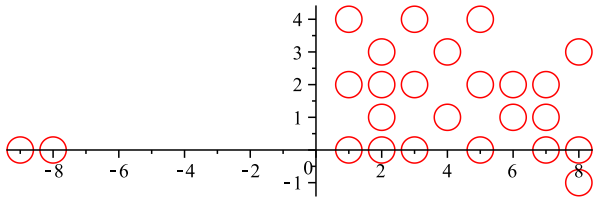

FIGURE 5.2: Le compact K pour l'exemple 5.3.2

TABLE 5.2: Bornes inférieures et supérieures pour $\gamma(K)$ pour l'exemple 5.3.2

Pôles par disque	Borne inférieure pour $\gamma(K)$	Borne supérieure pour $\gamma(K)$	Temps (s)
1	4.073652478223290	4.219704181009330	0.177746
5	4.148169157685863	4.148514554979665	3.702191
9	4.148331342401185	4.148332498165111	11.606526
13	4.148331931858607	4.148331938572625	24.848263
17	4.148331934292544	4.148331934334756	41.342390

Exemple 5.3.3. *Union de quatre ellipses.* Voici un dernier exemple de calcul de la capacité analytique d'un compact borné par des courbes analytiques. Le compact K est composé de quatre ellipses centrées en -3, 3, $10i$, $-10i$. Chacune des ellipses a un demi-grand axe de 2 et un demi-petit axe de 1 :

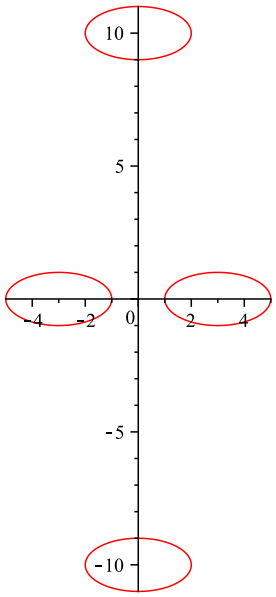

FIGURE 5.3: Le compact K pour l'exemple 5.3.3

TABLE 5.3: Bornes inférieures et supérieures pour $\gamma(K)$ pour l'exemple 5.3.3

Pôles par ellipse	Borne inférieure pour $\gamma(K)$	Borne supérieure pour $\gamma(K)$	Temps (s)
1	4.290494450313371	5.652385361022830	0.216726
5	5.252560204445119	5.409346641441133	5.050321
9	5.356419589376638	5.377445884292628	17.046010
13	5.370294221602940	5.372647798816198	32.329140
17	5.371887716798597	5.372042749677752	52.909583
41	5.371995573158984	5.371995871042409	334.479270

Dans cet exemple, les intégrales doivent être calculées numériquement. Pour ce faire, on a utilisé une quadrature adaptative de Gauss-Kronrod avec une tolérance d'erreur absolue et relative de 10^{-9}.

5.3.2 Compacts bornés par des courbes analytiques par morceaux

Dans cette sous-section, on présente différents exemples de calcul de la capacité analytique de compacts bornés par des courbes analytiques par morceaux.

Exemple 5.3.4. *Le carré.* On considère le carré avec coins en 1, i, -1, $-i$.

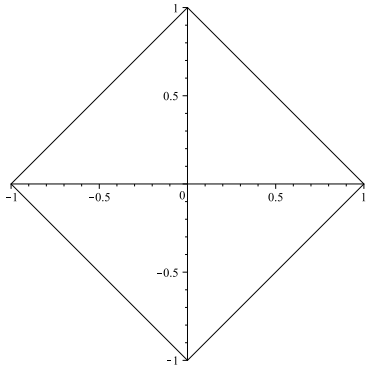

FIGURE 5.4: Le compact K pour l'exemple 5.3.4

Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, considérons les fonctions d'approximation $\{z^{-j} : 1 \leq j \leq n\}$.

La Table 5.4 présente les bornes obtenues avec différentes valeurs de n :

TABLE 5.4: Bornes inférieures et supérieures pour $\gamma(K)$ pour l'exemple 5.3.4

n	Borne inférieure pour $\gamma(K)$	Borne supérieure pour $\gamma(K)$	Temps (s)
2	0.707106781186547	0.900316316157106	0.021981
3	0.707106781186547	0.900316316157106	0.069278
4	0.707106781186547	0.887142803070031	0.109346
5	0.746499705182962	0.887142803070031	0.145614
10	0.761941423753061	0.881014562149127	0.595552
20	0.776589045256849	0.872341829081944	5.537981
30	0.786857803378602	0.869257904380382	16.344379
40	0.790942498354322	0.866133165258689	33.595790

À la lumière des résultats obtenus, une remarque est de mise. La convergence s'avère particulièrement lente, spécialement en comparaison avec les valeurs numériques des exemples précédents. Cela provient du fait que la méthode, bien que naturelle, ne prend aucunement en considération la nature géométrique de la frontière. Dans le but d'accélérer la convergence, le choix des fonctions d'approximation doit d'une certaine manière refléter la présence de singularités au bord.

En vertu des théorèmes 4.2 et 4.19, les fonctions à approximer sont

$$q(z) = c\sqrt{(\widetilde{\psi} \circ F)(z)}\sqrt{F'(z)}$$

et

$$f(z)q(z) = cf(z)\sqrt{(\widetilde{\psi} \circ F)(z)}\sqrt{F'(z)}$$

pour une certaine constante c, où F est une application conforme de X sur $\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}}$ avec $F(\infty) = \infty$ et où X dénote le complément du carré K par rapport à $\mathbb{C}_\infty$. Par les théorèmes 3.3 et 3.5, les fonctions f et $\sqrt{(\widetilde{\psi} \circ F)}$ s'étendent continûment à la frontière. Elles peuvent donc être approximées par des fonctions rationnelles avec pôles à l'intérieur du carré. Ainsi, il ne reste plus qu'à rajouter des fonctions d'approximation se comportant de façon similaire à $\sqrt{F'}$ en chacun des coins. Si a est un des coins du carré, alors F doit rectifier l'angle de $3\pi/2$ à π, autrement dit, F doit se comporter comme la fonction

$$(z-a)^{2/3}$$

au voisinage de a. En dérivant et en prenant la racine carrée, on obtient que $(z-a)^{-1/6}$ devrait être une bonne approximation de $\sqrt{F'}$ près de a, à une constante multiplicative près.

Puisque les fonctions d'approximation doivent être holomorphes au voisinage du point ∞, on considérera plutôt

$$\Big(\frac{z-a}{z}\Big)^{-1/6}.$$

En vertu de ces remarques, on propose la méthode suivante pour le calcul de $\gamma(K)$:

Pour un entier n fixé, considérons les fonctions d'approximation

$$\frac{f_j(z)}{z^k}$$

pour $j = 0, 1, 2, 3, 4$ et $k = 1, 2, \ldots, n$, où a_1, a_2, a_3, a_4 sont les coins du carré,

$$f_0(z) := 1$$

et

$$f_j(z) := \Big(\frac{z-a_j}{z}\Big)^{-1/6} \qquad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Utilisons cette méthode modifiée pour recalculer la capacité analytique du carré de l'exemple 5.3.4. Les résultats numériques obtenus sont nettement plus convaincants (voir la Table 5.5) ; en effet, la convergence est beaucoup plus rapide.

Enfin, remarquons que dans ce cas, la réponse peut être calculée analytiquement. En effet, puisque K est connexe, on a

$$\gamma(K) = \mathrm{cap}(K) = \sqrt{2}\frac{\Gamma(1/4)^2}{4\pi^{3/2}} \approx 0.83462684167407318630,$$

TABLE 5.5: Bornes inférieures et supérieures pour $\gamma(K)$

n	Borne inférieure pour $\gamma(K)$	Borne supérieure pour $\gamma(K)$	Temps (s)
2	0.834566926465074	0.835066810881929	1.334885
3	0.834609482283050	0.834678782816948	2.918624
4	0.834622127643984	0.834628966618492	5.220941
5	0.834626255962448	0.834627566559480	8.022274
6	0.834626584020641	0.834627152182154	11.542859

où $\mathrm{cap}(K)$ est la capacité logarithmique de K.

La méthode modifiée décrite ci-haut se généralise aisément à tout ensemble compact borné par des courbes analytiques par morceaux. En effet, supposons que K est borné par m courbes analytiques par morceaux, disons $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$. Fixons d'abord un point c dans l'intérieur de γ_1 et soit $a_1, a_2, \ldots, a_N$ les différents points où γ_1 n'est pas dérivable. Supposons que γ_1 fait un angle extérieur de α_j au point a_j, où $0 < \alpha_j < 2\pi$. Il suffit alors d'ajouter les fonctions d'approximation

$$\frac{f_j(z)}{(z-c)^k}$$

pour $j = 0, 1, 2, \ldots, N$ et $k = 1, 2, \ldots, n$, où

$$f_0(z) := 1$$

et

$$f_j(z) := \Big(\frac{z-a_j}{z-c}\Big)^{(1/2)(\pi/\alpha_j - 1)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, N).$$

On répète ensuite la procédure pour les autres courbes $\gamma_2, \ldots, \gamma_m$.

L'exemple suivant illustre bien le tout :

Exemple 5.3.5. *Union de deux carrés, d'un triangle équilatéral et d'un rectangle.*

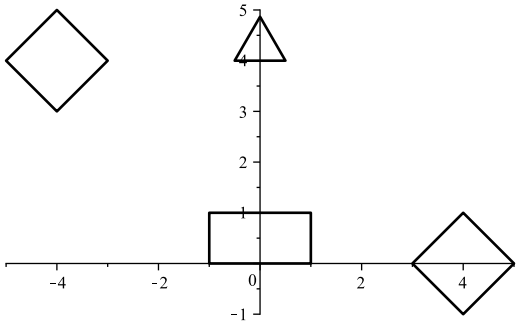

FIGURE 5.5: Le compact K pour l'exemple 5.3.5

TABLE 5.6: Bornes inférieures et supérieures pour $\gamma(K)$ pour l'exemple 5.3.5

n	Borne inférieure pour $\gamma(K)$	Borne supérieure pour $\gamma(K)$	Temps (s)
1	2.688593215018632	2.724269900679792	10.371944
2	2.693483826380926	2.695819902453329	32.881242
3	2.693867645864377	2.694261483861710	71.562216
4	2.693961062687599	2.694025016036611	122.607285
5	2.693971930182724	2.693982653270314	184.203252

Exemple 5.3.6. *Union d'un disque et de deux demi-disques.* Le dernier exemple est un compact borné par des courbes analytiques par morceaux mais non polygonales. Il s'agit d'un exemple typique de géométrie apparaissant fréquemment en mathématiques appliquées, faisant intervenir une frontière lisse à l'exception de quelques singularités.

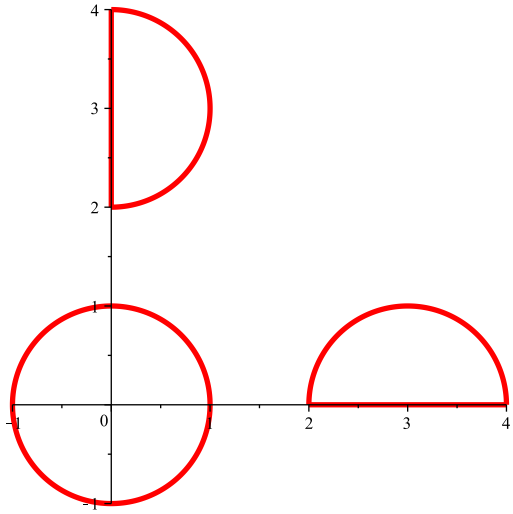

FIGURE 5.6: Le compact K pour l'exemple 5.3.6

Le compact K est composé du disque unité et de deux demi-disques de rayon 1 centrés en 3 et $3i$. Cet ensemble fut également étudié dans [36] et ensuite dans [35], pour le calcul de la

TABLE 5.7: Bornes inférieures et supérieures pour $\gamma(K)$ pour l'exemple 5.3.6

n	Borne inférieure pour $\gamma(K)$	Borne supérieure pour $\gamma(K)$	Temps (s)
2	2.118603690751346	2.123888275897654	2.546965
3	2.120521869940459	2.121230615594293	4.926440
4	2.120666182274863	2.120803766391281	9.488024
5	2.120694837101383	2.120716977856280	13.679742
6	2.120703235395670	2.120709388805280	22.344576
7	2.120704581010457	2.120707633546616	28.953791
8	2.120705081159854	2.120706704970516	34.781046

capacité logarithmique. En particulier, il fut démontré que $\text{cap}(K) \in [2.19699, 2.19881]$. Les résultats de la table précédente sont donc cohérents avec l'inégalité

$$\gamma(K) \leq \text{cap}(K).$$

Pour conclure cette sous-section, une brève remarque est de mise. En comparant les exemples de la sous-section 5.3.2 avec ceux de la sous-section 5.3.1, on constate immédiatement que la convergence est plus lente dans le cas analytique par morceaux. En fait, on ne peut espérer

avoir une convergence similaire dans les deux cas. Cela provient du fait que dans le cas où les courbes ne sont pas analytiques, les fonctions extrémales du Théorème 4.19 ne possèdent pas de prolongement analytique à travers l'ensemble de la frontière.

Chapitre 6

Le problème de la sous-additivité

Ce chapitre est dédié à l'étude de la question suivante :

Est-il vrai que

$$\gamma(E \cup F) \leq \gamma(E) + \gamma(F) \tag{6.1}$$

pour tous sous-ensembles compacts E, F du plan ? Autrement dit, la capacité analytique est-elle sous-additive ?

Certains résultats semblent indiquer que la réponse est positive. En effet, en premier lieu, un résultat de Suita [43] affirme que la capacité analytique est sous-addititive dans le cas où E et F sont connexes et disjoints. En second lieu, l'inégalité (6.1) est vraie si $\gamma(E) = 0$ ou $\gamma(F) = 0$: il s'agit d'une conséquence immédiate de [17, Chapitre 1, Théorème 1.4]. Troisièmement, le Théorème 2.17 implique que la capacité analytique est sous-additive pour les sous-ensembles compacts de l'axe réel. Enfin, Tolsa [44] démontra en 2003 que la capacité analytique est semi-additive, dans le sens qu'il existe une constante universelle C telle que

$$\gamma(E \cup F) \leq C(\gamma(E) + \gamma(F))$$

pour tous sous-ensembles compacts E, F. Toutefois, la valeur exacte de la constante C optimale demeure encore à ce jour inconnue.

Un obstacle majeur dans l'étude de l'inégalité (6.1) est qu'il demeure extrêmement difficile en pratique de déterminer la capacité analytique d'un ensemble compact donné. En fait, comme nous l'avons vu au chapitre 2, il est même difficile de déterminer si celle-ci est positive ou non ! Or, à la lumière des exemples présentés à la sous-section 5.3.1, la méthode pour le calcul numérique de la capacité analytique du chapitre 5 se révèle très efficace dans le cas d'unions finies de disques disjoints. Le théorème suivant affirme qu'heureusement, ce cas particulier suffit dans l'étude du problème de la sous-additivité :

Théorème 6.1. *Les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) $\gamma(E \cup F) \leq \gamma(E) + \gamma(F)$ *pour tous sous-ensembles compacts* E, F.

(ii) $\gamma(E \cup F) \leq \gamma(E) + \gamma(F)$ *pour tous sous-ensembles compacts disjoints* E, F *qui sont des unions d'un nombre fini de disques fermés et disjoints, tous de même rayon.*

Clairement (i) implique (ii), mais l'autre implication est loin d'être triviale. La preuve de cette dernière requiert une approche discrète à la capacité analytique due à Melnikov [29].

6.1 L'approche de Melnikov

Soit $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ et soit $r_1, r_2, \ldots, r_n$ des nombres réels positifs. Définissons $Z := (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ et $R := (r_1, r_2, \ldots, r_n)$, et supposons que $|z_j - z_k| > r_j + r_k$ pour $j \neq k$, de sorte que les disques fermés $\overline{\mathbb{D}}(z_j, r_j)$ sont mutuellement disjoints. Définissons également

$$K(Z, R) := \bigcup_{j=1}^{n} \overline{\mathbb{D}}(z_j, r_j)$$

et

$$\mu_1 = \mu_1(Z, R) := \sup\Big\{\Big|\sum_{j=1}^{n} a_j\Big|\Big\},$$

où le supremum est pris sur tous les nombres complexes $a_1, \ldots, a_n$ tels que

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{z - z_j}\Big| \leq 1 \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus K(Z, R)).$$

Clairement, $\mu_1 \leq \gamma(K(Z, R))$.

Enfin, pour chaque compact $K \subseteq \mathbb{C}$ et pour chaque $\delta > 0$, on dénote par K_δ le δ-voisinage fermé de K.

Le lemme suivant est précisément ce dont on a besoin pour démontrer le Théorème 6.1 :

Lemme 6.2. *Soit* $K \subseteq \mathbb{C}$ *compact et soit* $\delta, \epsilon > 0$. *Alors il existe* $z_1, \ldots, z_n \in K_\delta$ *et* $0 < r < \delta$ *tels que* $|z_j - z_k| > 2r$ *pour* $j \neq k$, *et*

$$\mu_1(Z, R) \geq (1 - \epsilon)\gamma(K),$$

où $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ *et* $R = (r, \ldots, r)$. *En particulier,*

$$\gamma(K(Z, R)) \geq (1 - \epsilon)\gamma(K).$$

Démonstration. Voir [29, Lemme 1]. □

On peut maintenant démontrer l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ du Théorème 6.1 :

Démonstration. Supposons que (i) est faux, c'est-à-dire qu'il existe des compacts E, F avec

$$\gamma(E \cup F) > \gamma(E) + \gamma(F).$$

Soit $0 < \epsilon < \gamma(E \cup F) - \gamma(E) - \gamma(F)$. Par la Proposition 2.11, il existe un $\delta > 0$ suffisamment petit tel que

$$\gamma(E_{2\delta}) < \gamma(E) + \epsilon/3 \tag{6.2}$$

et

$$\gamma(F_{2\delta}) < \gamma(F) + \epsilon/3. \tag{6.3}$$

Par le Lemme 6.2, il existe $z_1, z_2, \ldots, z_n \in (E \cup F)_\delta$ et $0 < r < \delta$ tels que

$$\gamma(K(Z, R)) \geq \gamma(E \cup F) - \epsilon/3,$$

où les disques $\overline{\mathbb{D}}(z_j, r)$ sont mutuellement disjoints. Maintenant, pour chaque $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, soit $w_j \in E \cup F$ avec $|z_j - w_j| = \operatorname{dist}(z_j, E \cup F) \leq \delta$. Soit A l'union des disques $\overline{\mathbb{D}}(z_j, r)$ avec $w_j \in E$ et B l'union des disques $\overline{\mathbb{D}}(z_k, r)$ avec $w_k \in F \setminus E$.

Alors $A \subseteq E_{2\delta}$ et $B \subseteq F_{2\delta}$. De plus, puisque $A \cup B = K(Z, R)$, on a

$$\begin{aligned}
\gamma(A \cup B) &\geq \gamma(E \cup F) - \epsilon/3 \\
&> \gamma(E) + \gamma(F) + \epsilon - \epsilon/3 \\
&= \gamma(E) + \epsilon/3 + \gamma(F) + \epsilon/3 \\
&> \gamma(A) + \gamma(B),
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé les inégalités (6.2) et (6.3). Ainsi, (ii) est faux. □

6.2 Capacité analytique discrète et sous-additivité

Pour $Z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, où $z_j \neq z_k$ pour chaque $j \neq k$, et pour $r > 0$, définissons

$$\gamma(Z, r) := \gamma\Big(\bigcup_{j=1}^{n} \overline{\mathbb{D}}(z_j, r)\Big).$$

Supposons de plus que les disques $\overline{\mathbb{D}}(z_j, r)$ sont mutuellement disjoints.

Par le Théorème 6.1, la sous-additivité de la capacité analytique est équivalente à

$$\gamma(Z, r) \leq \gamma(Z', r) + \gamma(Z'', r)$$

pour tout $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ et pour tout $m \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, où $Z = (z_1, \ldots, z_n)$, $Z' = (z_1, \ldots, z_m)$ et $Z'' = (z_{m+1}, \ldots, z_n)$.

L'inégalité ci-dessus peut s'écrire sous la forme

$$R(Z, r, m) \leq 1,$$

où

$$R(Z,r,m) := \frac{\gamma(Z,r)}{\gamma(Z',r)+\gamma(Z'',r)}.$$

Ceci illustre l'importance que revêt l'étude de la quantité $R(Z,r,m)$.

Le but de cette section est d'obtenir le développement asymptotique suivant pour $R(Z,r,m)$:

Théorème 6.3. *Fixons $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ et fixons $m \in \{1,2,\ldots,n-1\}$. Alors*

$$R(Z,r,m) = 1 - Cr^2 + O(r^3)$$

lorsque $r \to 0$, où C est une constante strictement positive dépendant uniquement de m, n et $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Pour la preuve du Théorème 6.3, on a besoin d'une version discrète de la capacité analytique introduite par Melnikov [29].

Pour $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ et $r > 0$, définissons la *capacité analytique discrète* λ par

$$\lambda(Z,r) := \sup\Big\{\Big|\sum_{j=1}^{n} a_j\Big|^2\Big\},$$

où le supremum est pris sur tous les $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{|a_k|^2}{r} + r\Big|\sum_{j\neq k}\frac{a_j}{z_k - z_j}\Big|^2\Big) \leq 1.$$

Introduisons également les constantes suivantes :

$$M(Z,r) := r^4 \sum_k \sum_{j\neq k} \frac{1}{|z_k - z_j|^4}$$

$$N(Z,r) := r\Big(\sum_k \sum_{j\neq k} \frac{1}{|z_k - z_j|^2}\Big)^{1/2} M(Z,r)^{1/2}.$$

Alors on a

Théorème 6.4. *Soit $Z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ et soit $r > 0$. Supposons que les disques $\overline{\mathbb{D}}(z_j, 2r)$ sont mutuellement disjoints. Alors*

$$\frac{\gamma(Z,r)}{1+4N(Z,r)} \leq \lambda(Z,r) \leq (1+2M(Z,r))\gamma(Z,r).$$

Corollaire 6.5. *Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ compact et soit $\delta, \epsilon > 0$. Alors il existe $z_1, \ldots, z_n \in K_\delta$ et $0 < r < \delta$ tels que $|z_j - z_k| > 2r$ pour $j \neq k$ et*

$$|\gamma(K) - \gamma(Z,r)| < \epsilon,$$

où $Z = (z_1, \ldots, z_n)$. De plus, on peut choisir Z et r de sorte que $M(Z,r) < \epsilon$ et $N(Z,r) < \epsilon$.

Démonstration. Voir [29, Théorème 2 et Corollaire]. □

Obtenons maintenant une expression pour $\lambda(Z,r)$ plus facile à manipuler. On procède comme dans [29].

Un calcul élémentaire montre que

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{|a_k|^2}{r}+r\Big|\sum_{j\neq k}\frac{a_j}{z_k-z_j}\Big|^2\Big)=\langle(D_R^{-1}+B)a,a\rangle,$$

où $a=(a_1,\dots,a_n)$, D_R est la matrice diagonale avec chaque entrée sur la diagonale principale égale à r et $B=(b_{jk})$, où

$$b_{jk}=\sum_{m\neq j,k}\frac{r}{(z_j-z_m)(\overline{z_k-z_m})}.$$

Ici $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dénote le produit scalaire standard sur $\mathbb{C}^n$.

La matrice B peut s'écrire sous la forme $B=CD_RC^*$, où $C=(c_{jk})$ est la matrice de Cauchy associée à $z_1,\dots,z_n$, i.e.

$$c_{jk}=\frac{1}{z_j-z_k}\qquad(j\neq k),\qquad c_{jj}=0.$$

Comme dans [29, Lemme 3], on obtient

$$\lambda(Z,r)=\langle(D_R^{-1}+CD_RC^*)^{-1}(\mathbf{1}),\mathbf{1}\rangle,$$

où $\mathbf{1}=(1,1,\dots,1)\in\mathbb{C}^n$.

Le lemme suivant contient des estimés pour la capacité analytique discrète :

Lemme 6.6. *Soit $Z=(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ et soit $r>0$. Alors*

$$nr-r^3\langle CC^*(\mathbf{1}),\mathbf{1}\rangle\leq\lambda(Z,r)\leq nr-r^3\langle CC^*(\mathbf{1}),\mathbf{1}\rangle+r^5\langle CC^*CC^*(\mathbf{1}),\mathbf{1}\rangle.$$

Démonstration. Voir [29, Lemme 4]. □

On aura également besoin du lemme suivant :

Lemme 6.7. *Fixons $z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}$ et, comme précédemment, soit $Z=(z_1,\dots,z_n)$, $Z'=(z_1,\dots,z_m)$ et $Z''=(z_{m+1},\dots,z_n)$.*

Écrivons $\alpha:=\langle CC^*(\mathbf{1}),\mathbf{1}\rangle$, $\alpha':=\langle C'C'^*(\mathbf{1}),\mathbf{1}\rangle$ et $\alpha'':=\langle C''C''^*(\mathbf{1}),\mathbf{1}\rangle$, où C,C',C'' sont les matrices de Cauchy associées à Z,Z',Z''. Alors

$$\alpha>\alpha'+\alpha''.$$

Démonstration. D'abord, remarquons que

$$\begin{aligned}\langle CC^*(\mathbf{1}), \mathbf{1}\rangle &= \langle C^*(\mathbf{1}), C^*(\mathbf{1})\rangle \\ &= \sum_j \sum_k \sum_{l\neq j,k} \frac{1}{(z_k - z_l)(\overline{z_j - z_l})} \\ &= \sum_j \sum_{l\neq j} \frac{1}{|z_j - z_l|^2} + \sum_j \sum_{k\neq j} \sum_{l\neq j,k} \frac{1}{(z_k - z_l)(\overline{z_j - z_l})}.\end{aligned}$$

Un calcul élémentaire montre que la seconde somme est égale à

$$\sum_{j<k<l} \Big(\frac{4S(z_j, z_k, z_l)}{|z_j - z_k||z_j - z_l||z_k - z_l|}\Big)^2 = \sum_{j<k<l} \frac{1}{Q(z_j, z_k, z_l)^2},$$

où $S(z_j, z_k, z_l)$ est l'aire du triangle avec sommets en z_j, z_k, z_l et $Q(z_j, z_k, z_l)$ est le rayon du cercle passant par les points z_j, z_k, z_l (si z_j, z_k, z_l sont colinéaires, on définit $S(z_j, z_k, z_l) := 0$ et $Q(z_j, z_k, z_l) := \infty$). Le résultat suit. □

On peut maintenant démontrer le Théorème 6.3 :

Démonstration du Théorème 6.3. Écrivons $M(Z, r) := Ar^4$ et $N(Z, r) := Br^3$, où A, B ne dépendent pas de r. Définissons également

$$\beta := \langle CC^*CC^*(\mathbf{1}), \mathbf{1}\rangle, \quad \beta' := \langle C'C'^*C'C'^*(\mathbf{1}), \mathbf{1}\rangle, \quad \beta'' := \langle C''C''^*C''C''^*(\mathbf{1}), \mathbf{1}\rangle,$$

où C, C', C'' sont comme dans le Lemme 6.7.

Par le Théorème 6.4 et le Lemme 6.6, on a

$$\begin{aligned}R(Z, r, m) &\leq \frac{(1 + 4Br^3)(1 + 2Ar^4)\lambda(Z, r)}{\lambda(Z', r) + \lambda(Z'', r)} \\ &\leq (1 + 4Br^3)(1 + 2Ar^4)\frac{nr - \alpha r^3 + \beta r^5}{mr - \alpha' r^3 + (n - m)r - \alpha'' r^3} \\ &= (1 + 4Br^3)(1 + 2Ar^4)\frac{n - \alpha r^2 + \beta r^4}{n - (\alpha' + \alpha'')r^2}.\end{aligned}$$

Maintenant, par le Lemme 6.7, $\alpha = \alpha' + \alpha'' + \delta$ pour un $\delta > 0$, et donc

$$\begin{aligned}R(Z, r, m) &\leq (1 + 4Br^3)(1 + 2Ar^4)\frac{n - (\alpha' + \alpha'' + \delta)r^2 + \beta r^4}{n - (\alpha' + \alpha'')r^2} \\ &= (1 + 4Br^3)(1 + 2Ar^4)\Big(1 - r^2\frac{\delta}{n - (\alpha' + \alpha'')r^2} + r^4\frac{\beta}{n - (\alpha' + \alpha'')r^2}\Big) \\ &= (1 + 4Br^3)(1 + 2Ar^4)\Big(1 - \frac{\delta}{n}r^2 + O(r^4)\Big) \\ &= 1 - \frac{\delta}{n}r^2 + O(r^3),\end{aligned}$$

lorsque $r \to 0$.

En procédant de façon similaire, on obtient l'inégalité inverse :

$$\begin{aligned}
R(Z,r,m) &\geq (1+2Ar^4)^{-1}(1+4Br^3)^{-1}\frac{\lambda(Z,r)}{\lambda(Z',r)+\lambda(Z'',r)} \\
&\geq (1+2Ar^4)^{-1}(1+4Br^3)^{-1}\frac{nr-\alpha r^3}{mr-\alpha' r^3+\beta' r^5+(n-m)r-\alpha'' r^3+\beta'' r^5} \\
&= (1+2Ar^4)^{-1}(1+4Br^3)^{-1}\frac{n-\alpha r^2}{n-(\alpha'+\alpha'')r^2+(\beta'+\beta'')r^4} \\
&= (1+2Ar^4)^{-1}(1+4Br^3)^{-1}\frac{n-(\alpha'+\alpha'')r^2-\delta r^2}{n-(\alpha'+\alpha'')r^2+(\beta'+\beta'')r^4} \\
&= (1+2Ar^4)^{-1}(1+4Br^3)^{-1}\Big(1-\frac{\delta r^2+(\beta'+\beta'')r^4}{n-(\alpha'+\alpha'')r^2+(\beta'+\beta'')r^4}\Big) \\
&= (1+2Ar^4)^{-1}(1+4Br^3)^{-1}\Big(1-\frac{\delta}{n}r^2+O(r^4)\Big) \\
&= 1-\frac{\delta}{n}r^2+O(r^3),
\end{aligned}$$

lorsque $r \to 0$. □

Remarque. Des propriétés intéressantes du rapport $R(Z,r,m)$ découlent directement du Théorème 6.3. En premier lieu, pour Z et m fixés, le développement asymptotique implique que $R(Z,r,m) \leq 1$ pour tout r suffisamment petit et que $R(Z,r,m) \to 1$ lorsque $r \to 0^+$. Une autre conséquence du Théorème 6.3 sera abordée dans la prochaine section.

6.3 Une conjecture reliée au problème de la sous-additivité

6.3.1 Formulation de la conjecture

Rappelons qu'en vertu du Théorème 6.1, la sous-additivité de la capacité analytique est équivalente à la sous-additivité dans le cas particulier d'unions disjointes d'un nombre fini de disques fermés et disjoints, tous de même rayon. Pour de tels ensembles compacts, la méthode pour le calcul numérique de la capacité analytique du chapitre 5 s'avère particulièrement efficace ; voir les exemples numériques de la sous-section 5.3.1. Cela nous a donc permis d'effectuer plusieurs expérimentations numériques.

Plus précisément, fixons $Z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ et $m \in \{1, \ldots, n-1\}$. Soit $r > 0$ suffisamment petit pour que les disques $\overline{\mathbb{D}}(z_j, r)$ soient mutuellement disjoints. Rappelons que le rapport $R(Z,r,m)$ est défini par

$$R(Z,r,m) = \frac{\gamma(E \cup F)}{\gamma(E)+\gamma(F)},$$

où

$$E := \bigcup_{j=1}^{m} \overline{\mathbb{D}}(z_j, r)$$

et

$$F := \bigcup_{j=m+1}^{n} \overline{\mathbb{D}}(z_j, r).$$

En utilisant la méthode numérique du chapitre 5, on peut facilement calculer des bornes inférieures et supérieures pour le ratio $R(Z, r, m)$.

Tous les calculs numériques effectués semblent indiquer que la capacité analytique est bel et bien sous-additive, ce qui équivaut à l'inégalité

$$R(Z, r, m) \leq 1$$

pour chaque Z, r, m. Beaucoup plus suprenant demeure le fait que le rapport $R(Z, r, m)$ semble diminuer lorsque r augmente.

Conjecture. Fixons $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ et $m \in \{1, \ldots, n-1\}$. Alors $R(Z, r, m)$ est une fonction décroissante de r.

En vertu de la remarque de la fin de la section précédente, une preuve de cette conjecture impliquerait la sous-additivité de la capacité analytique.

Mentionnons également que la démonstration du Théorème 6.3 entraîne que, pour Z et m fixés, le rapport $R(Z, r, m)$ est décroissant en r et ce, pour tout r suffisamment petit.

Illustrons maintenant la conjecture par quelques exemples numériques.

6.3.2 Exemples numériques

Exemple 6.3.1. Pour ce premier exemple, le nombre de disques est $n = 40$, et $m = 20$. Le compact E est composé des 20 disques dont la frontière est en trait gras, tandis que F est l'union des disques restants.

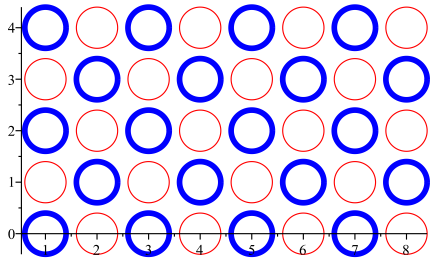

FIGURE 6.1: Le compact $E \cup F$ pour l'exemple 6.3.1

Pour 500 valeurs du rayon r également distribuées entre 0 and 0.499, on a calculé des bornes inférieures et supérieures pour le rapport $R(z, r, m)$. La Figure 6.2 illustre le graphe de la borne inférieure en terme de r. Le graphe pour la borne supérieure, quant à lui, est presque identique. En effet, les deux graphes diffèrent par au plus 0.002481.

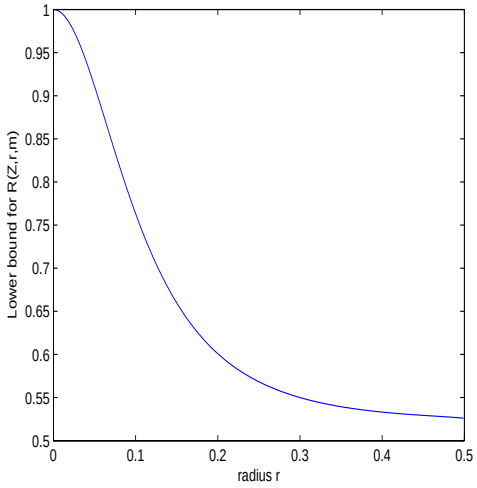

FIGURE 6.2: Graphe du rapport $\gamma(E \cup F)/(\gamma(E) + \gamma(F))$ pour l'exemple 6.3.1

Exemple 6.3.2. Les centres des disques sont également distancés sur l'axe réel. Le nombre de disques est $n = 10$, et $m = 5$.

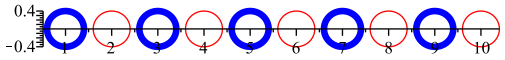

FIGURE 6.3: Le compact $E \cup F$ pour l'exemple 6.3.2

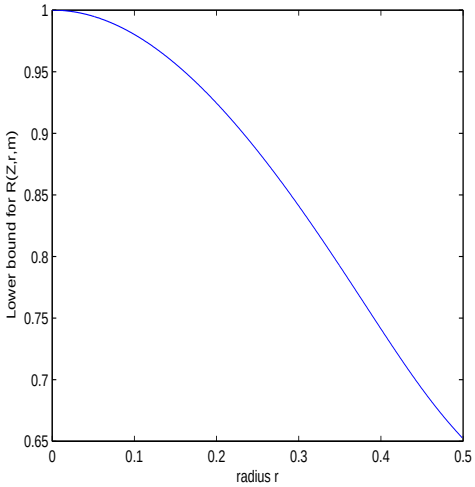

FIGURE 6.4: Graphe du rapport $\gamma(E \cup F)/(\gamma(E) + \gamma(F))$ pour l'exemple 6.3.2

Exemple 6.3.3. Les disques sont centrés de façon plutôt aléatoire. Le nombre de disques est $n = 18$, et $m = 12$.

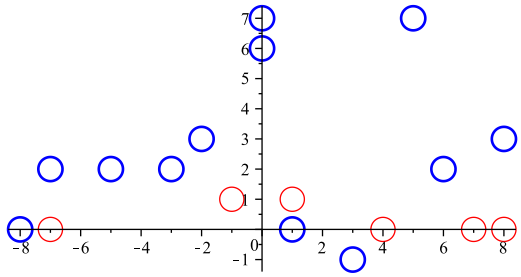

FIGURE 6.5: Le compact $E \cup F$ pour l'exemple 6.3.3

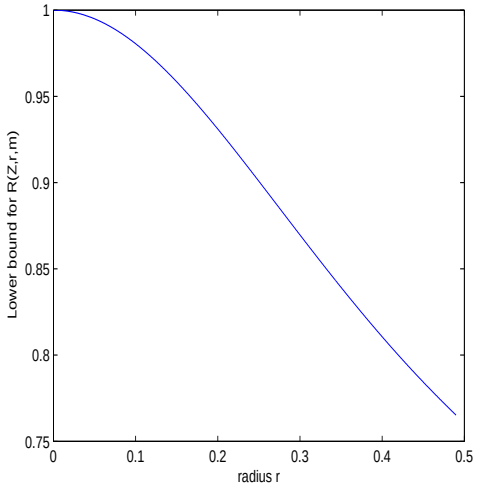

FIGURE 6.6: Graphe du rapport $\gamma(E \cup F)/(\gamma(E) + \gamma(F))$ pour l'exemple 6.3.3

Exemple 6.3.4. Ce dernier exemple montre que la situation peut changer drastiquement si l'on fixe le rayon de certains des disques tout en laissant le rayon des autres disques varier. Les disques de gauche sont fixés, avec un rayon de 0.49. Les rayons des deux disques centrés en 10 et 11 varient simultanément, de 0 à 0.499.

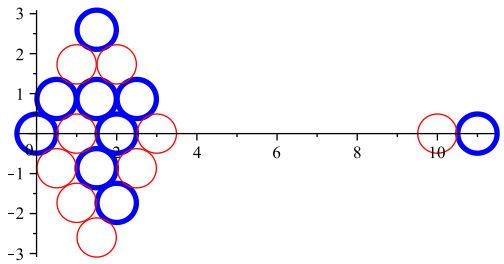

FIGURE 6.7: Le compact $E \cup F$ pour l'exemple 6.3.4

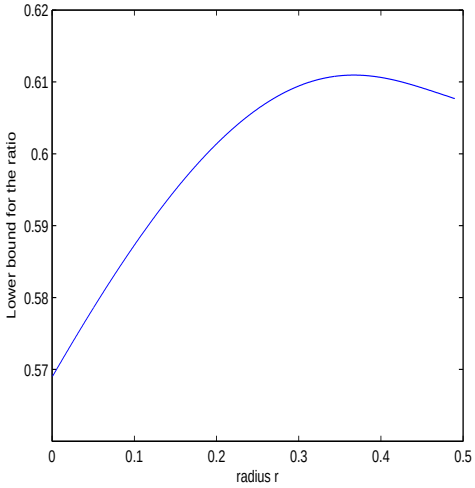

FIGURE 6.8: Graphe du rapport $\gamma(E \cup F)/(\gamma(E) + \gamma(F))$ pour l'exemple 6.3.4

6.3.3 Preuve de la conjecture dans le cas $n = 2$

On termine ce chapitre par une preuve de la Conjecture 6.3.1 dans le cas le plus simple, celui de $n = 2$.

Théorème 6.8. *Soit E et F deux disques fermés et disjoints de rayon r. Alors*

$$\frac{\gamma(E \cup F)}{\gamma(E) + \gamma(F)}$$

est une fonction décroissante de r.

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que E et F sont centrés en c et $-c$ respectivement, où $c > 0$ et $0 < r < c$.

L'idée principale de la preuve présentée dans [48] est due à Juan Arias de Reyna. On y démontre le résultat en utilisant la formule suivante pour la capacité analytique en terme des fonctions theta de Jacobi (voir l'équation (5.1)) :

$$\gamma(E \cup F) = \frac{r}{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{q}} - \sqrt{q}\Big)\vartheta_2(q)^2,$$

où q est la solution dans l'intervalle $(0, 1)$ de l'équation

$$\frac{c}{r} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{q}} + \sqrt{q}\Big).$$

On présente ici une autre démonstration, basée cette fois sur l'expression suivante pour $\gamma(E \cup F)$ due à Murai [30] :

$$\gamma(E \cup F) = \frac{2}{\pi} ckK(k) \tanh\left(\frac{\pi}{2}\frac{K(\sqrt{1-k^2})}{K(k)}\right), \tag{6.4}$$

où K est l'intégrale elliptique complète de première espèce et k est donné par la relation

$$\frac{c}{r} = \cosh\left(\frac{\pi}{2}\frac{K(\sqrt{1-k^2})}{K(k)}\right). \tag{6.5}$$

L'avantage de cette seconde preuve est qu'elle ne requiert pas les propriétés modulaires des fonctions theta. On utilise uniquement des notions élémentaires de calcul, ce qui paraît plus naturel dans une preuve de monotonie d'une fonction donnée.

Pour démontrer le résultat, il suffit de montrer que la fonction suivante est décroissante en k, en vertu des équations (6.4) et (6.5) :

$$f(k) := kK(k) \sinh\left(\frac{\pi}{2}\frac{K(\sqrt{1-k^2})}{K(k)}\right) \qquad (k \in (0, 1)).$$

Adoptons la notation standard suivante :

Tel que mentionné préalablement, K dénote l'intégrale elliptique complète de première espèce et E, l'intégrale elliptique complète de seconde espèce. Aussi, posons $k' := \sqrt{1-k^2}$ et définissons

$$\mu(k) := \frac{\pi}{2}\frac{K(k')}{K(k)},$$

de sorte que $f(k) = kK(k)\sinh\mu(k)$.

On aura également besoin des formules classiques suivantes pour les dérivées des fonctions K, E et μ :

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E-k'^2K}{kk'^2}, \quad \frac{dE}{dk} = \frac{E-K}{k}, \quad \frac{d\mu}{dk} = -\frac{\pi^2}{4kk'^2K^2}.$$

On considère séparément les deux cas suivants :

Cas 1 : $k \in (0, 0.97)$

Montrons que $f'(k) < 0$ pour $k \in (0, 0.97)$. Pour ce faire, on a besoin de deux lemmes :

Lemme 6.9. *Pour $k \in (0,1)$, on a*

$$\tanh\mu(k) < \frac{2\pi}{2K+\pi}.$$

Démonstration. Posons $q := \exp(-\pi K(k')/K(k)) = \exp(-2\mu(k))$. Cette quantité porte généralement le nom de *nome de Jacobi*, et l'on a

$$K = \frac{\pi}{2}\left(1 + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^k}{1+q^{2k}}\right)$$

(voir par exemple [2, Équation (3.14), p.50]). Ainsi,

$$\frac{2}{\pi}K < 1 + 4\frac{q}{1-q} = 2\frac{1+q}{1-q} - 1,$$

i.e.

$$\frac{1-q}{1+q} < \frac{2\pi}{2K+\pi}.$$

D'autre part, clairement $(1-q)/(1+q) = \tanh\mu(k)$ et le résultat suit. □

Lemme 6.10. *Soit*

$$\phi(k) := \frac{E^2 - k'^2K^2}{E - k'^2K} \qquad (k \in (0,1)).$$

Alors ϕ est une fonction croissante de $(0,1)$ sur $(0,1)$.

Démonstration. Voir [2, Équation (17), p.70]. □

On peut maintenant montrer que $f' < 0$ sur $(0, 0.97)$. Les formules de dérivées entraînent que

$$f'(k) = \frac{1}{k'^2}\left(E \sinh \mu(k) - \frac{\pi^2}{4}\frac{\cosh \mu(k)}{K}\right),$$

et donc $f'(k) < 0$ si et seulement si

$$4KE \tanh \mu(k) < \pi^2 \tag{6.6}$$

Par le Lemme 6.9, il suffit de montrer que

$$\frac{8\pi KE}{2K + \pi} \leq \pi^2 \qquad (k \in (0, 0.97))$$

i.e.

$$8KE - 2\pi K - \pi^2 \leq 0 \qquad (k \in (0, 0.97)).$$

Définissons $\psi(k) := 8KE - 2\pi K - \pi^2$. Puisque $E(0) = K(0) = \pi/2$, on a $\psi(0) = 0$. Il suffit donc de montrer que ψ est décroissante sur $(0, 0.97)$. Les formules de dérivées permettent d'obtenir

$$\psi' = \frac{1}{kk'^2}\left(8(E^2 - k'^2K^2) - 2\pi(E - k'^2K)\right)$$

et donc $\psi' \leq 0$ sur $(0, 0.97)$ si et seulement si

$$\frac{E^2 - k'^2K^2}{E - k'^2K} \leq \frac{\pi}{4} \qquad (k \in 0, 0.97).$$

Remarquons que la quantité $E - k'^2K$ est positive en vertu de la formule de dérivée pour K (K est strictement croissante). Or, par le Lemme 6.10, on a, pour $k \in (0, 0.97)$,

$$\frac{E^2 - k'^2K^2}{E - k'^2K} = \phi(k) \leq \phi(0.97) \approx 0.74325 < \pi/4 \approx 0.78540.$$

Ceci complète la preuve pour le cas 1.

Cas 2 : $k \in [0.97, 1)$

On aura besoin des lemmes suivants :

Lemme 6.11. *Soit $-\infty < a < b < \infty$ et soit $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et dérivables sur (a, b). Supposons que $h' < 0$ sur (a, b) et que g'/h' est décroissante sur (a, b). Alors*

$$\frac{g(x) - g(b)}{h(x) - h(b)}$$

est aussi décroissante sur (a, b).

Démonstration. Par le théorème de la moyenne, pour chaque $x \in (a, b)$, il existe $y \in (x, b)$ tel que

$$\frac{g(x) - g(b)}{h(x) - h(b)} = \frac{g'(y)}{h'(y)} < \frac{g'(x)}{h'(x)}.$$

Mais $h(x) - h(b) > 0$ et $h'(x) < 0$, donc $(h(x) - h(b))h'(x) < 0$. En multipliant l'inégalité ci-dessus par cette quantité, on obtient

$$h'(x)(g(x) - g(b)) > g'(x)(h(x) - h(b)),$$

i.e.

$$\frac{d}{dx}\frac{g(x) - g(b)}{h(x) - h(b)} < 0.$$

□

Lemme 6.12. *Pour $k \in (0, 1)$, on a*

$$\tanh \mu(k) > k'^{1/4}.$$

Démonstration. Ceci découle directement de la formule suivante pour k' :

$$k' = \prod_{n=1}^{\infty} \tanh^4 ((2n - 1)\mu(k)),$$

que l'on retrouve par exemple dans [2, Théorème 5.24] □

Lemme 6.13. *Soit $c \geq 1/2$. Alors*

$$\widetilde{\phi}(k) := k'^c K$$

est décroissante sur $(0, 1)$.

Démonstration. Voir [2, Théorème 3.21].

□

Montrons maintenant que f est décroissante sur $[0.97, 1)$. Écrivons

$$f(k) := \frac{g(k)}{h(k)},$$

où $g(k) = \sinh \mu(k)$ et $h(k) = (kK)^{-1}$. Alors $g(1) = h(1) = 0$ et

$$g'(k) = \frac{-\pi^2}{4}\frac{\cosh \mu(k)}{kk'^2K^2},$$

$$h'(k) = -\frac{E}{k^2k'^2K^2}.$$

En particulier, $h' < 0$ sur $(0, 1)$. Ainsi, par le Lemme 6.11, il suffit de montrer que g'/h' est décroissante sur $[0.97, 1)$. Or, on a

$$\frac{g'}{h'} = \frac{\pi^2}{4}\frac{k \cosh \mu(k)}{E} := \frac{\pi^2}{4}\widetilde{\psi}(k).$$

Montrons donc que $\widetilde{\psi}' < 0$ sur $(0.97, 1)$. En utilisant les formules de dérivées encore une fois, on obtient

$$\widetilde{\psi}'(k) = \frac{1}{E^2}\left(K\cosh\mu(k) - \frac{\pi^2}{4}\frac{E\sinh\mu(k)}{k'^2K^2}\right),$$

et donc $\widetilde{\psi}' < 0$ sur $(0.97, 1)$ si et seulement si

$$K^3 < \frac{\pi^2}{4}\frac{E\tanh\mu(k)}{k'^2} \qquad (k \in (0.97, 1)).$$

Par le Lemme 6.12 et le fait que $E \geq 1$, il suffit de montrer que

$$K^3 \leq \frac{\pi^2}{4}\frac{(k')^{1/4}}{k'^2} \qquad (k \in (0.97, 1)),$$

c'est-à-dire

$$((k')^{7/12}K)^3 \leq \frac{\pi^2}{4} \qquad (k \in (0.97, 1)).$$

Or, par le Lemme 6.13, on a, pour $k \in (0.97, 1)$,

$$((k')^{7/12}K)^3 = (\widetilde{\phi}(k))^3 \leq (\widetilde{\phi}(0.97))^3 \approx 1.90360 < \frac{\pi^2}{4} \approx 2.46740.$$

Ainsi, f est décroissante sur $[0.97, 1)$.

Ceci termine la preuve du théorème. □

Deuxième partie

Fonctions d'Ahlfors rationnelles

Chapitre 7

Problème de Jeong–Taniguchi et théorème de représentation de Bell

7.1 Restrictions de fonctions rationnelles

Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ un compact borné par n courbes de Jordan analytiques disjointes et soit $X := \mathbb{C}_\infty \setminus K$. Alors X est un domaine n-connexe et par le théorème d'Ahlfors (Théorème 3.3), la fonction d'Ahlfors f sur X est une application holomorphe propre de degré n de X sur $\mathbb{D}$. De plus, en vertu du principe de réflexion de Schwarz, f s'étend à une fonction holomorphe $f : \overline{X} \to \overline{\mathbb{D}}$ qui envoie chacune des courbes frontières de K de façon homéomorphe sur $\mathbb{T}$.

Rappelons qu'en général, il est fort difficile d'identifier explicitement la fonction d'Ahlfors pour un tel ensemble compact donné. Toutefois, le fait que f doit être une application holomorphe propre de degré n de X sur $\mathbb{D}$ peut être utilisé pour obtenir de bons candidats de fonctions d'Ahlfors.

En effet, soit R une fonction rationnelle de degré n avec $R(\infty) = 0$. Rappelons que le degré d'une fonction rationnelle $R = P/Q$ est donné par le maximum entre les degrés de P et Q. Si R est de degré n, alors chaque point dans la sphère de Riemann possède exactement n préimages, en comptant les multiplicités. Soit $X := R^{-1}(\mathbb{D})$, de sorte que $\infty \in X$ et que chaque pôle de R est à l'extérieur de $\overline{X}$. Notons qu'en général, X n'est pas forcément un domaine n-connexe ; supposons néanmoins pour le moment que c'est le cas. Alors $R : \overline{X} \to \overline{\mathbb{D}}$ est une application holomorphe propre de degré n qui envoie chacune des courbes frontières de X de façon homéomorphe sur $\mathbb{T}$. Ainsi, R possède les propriétés requises d'un candidat pour la fonction d'Ahflors sur X.

Ceci motive la définition suivante :

Definition 7.1. Soit R une fonction rationnelle de degré n. Alors R est appelée *fonction d'Ahlfors rationnelle* si $R^{-1}(\mathbb{D})$ est un domaine n-connexe contenant le point ∞ et si R est la

fonction d'Ahlfors sur $R^{-1}(\mathbb{D})$.

Le problème suivant fut soulevé par Jeong et Taniguchi [25] :

Problème 7.2 (Jeong–Taniguchi)**.** Déterminer toutes les fonctions d'Ahlfors rationnelles de degré n.

Remarquons que si R est une fonction d'Ahlfors rationnelle, alors $R(\infty) = 0$ et $R'(\infty) > 0$. De plus, par le Corollaire 2.16, les fonctions d'Ahlfors rationnelles de degré 1 sont les transformations de Möbius de la forme $a/(z-p)$ avec $p \in \mathbb{C}$ et $a > 0$. En outre, par la loi de transformation des fonctions d'Ahlfors sous application conforme (Proposition 3.7), les fonctions d'Ahlfors rationnelles se comportent bien sous précomposition par une application affine :

Proposition 7.3. *Soit $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$, et soit R une fonction rationnelle de degré n. Alors R est une fonction d'Ahlfors rationnelle si et seulement si $Q(z) := (a/|a|)R(az+b)$ l'est aussi.*

Dans les chapitres subséquents, on s'intéresse au Problème 7.2 d'abord d'un point de vue analytique, en identifiant explicitement des familles de fonctions d'Ahlfors rationnelles, puis d'un point de vue topologique, en décrivant des propriétés topologiques de l'ensemble des fonctions d'Ahlfors rationnelles de degré fixé.

Plus précisément, les sections restantes du chapitre 7 sont dédiées aux principaux outils dont nous aurons besoin tout au long de l'étude du problème de Jeong–Taniguchi, soit le théorème de représentation de Bell ainsi que le théorème de Bieberbach sur les applications de Grunsky. Ensuite, au chapitre 8, on donne une solution partielle au Problème 7.2 en exhibant, pour chaque entier $n \geq 2$, deux familles de fonctions d'Ahlfors rationnelles de degré n, chacune présentant une symétrie particulière. On détermine également toutes les fonctions d'Ahlfors rationnelles de degré 2. Ces résultats fournissent de nouveaux exemples explicites de fonctions d'Ahlfors et donc *a fortiori*, de capacités analytiques. Par la suite, on illustre les résultats obtenus avec des exemples numériques, grâce à la méthode pour le calcul de la capacité analytique introduite au chapitre 5. Les différents résultats obtenus de même que la solution du Problème 7.2 en degré 1 et 2 semblent indiquer qu'une fonction rationnelle R de degré n telle que $R(\infty) = 0$ et $R^{-1}(\mathbb{D})$ est n-connexe est une fonction d'Ahlfors rationnelle si tous ses résidus sont positifs. Or, on présente un exemple numérique montrant que la positivité des résidus n'est pas une condition suffisante pour être une fonction d'Ahlfors rationnelle.

Le chapitre 9, quant à lui, est consacré à l'étude des propriétés topologiques de $\mathcal{A}(n)$, l'ensemble des fonctions d'Ahlfors rationnelles de degré n. À l'aide du théorème de représentation de Bell et de plusieurs théorèmes de convergence de type Carathéodory, on construit un homéomorphisme permettant d'obtenir plusieurs informations topologiques intéressantes sur $\mathcal{A}(n)$.

Comme application, on montre que la positivité des résidus n'est pas non plus une condition nécessaire pour être une fonction d'Ahlfors rationnelle.

7.2 Fonctions rationnelles n-good

Soit R une fonction rationnelle de degré n et soit $X := R^{-1}(\mathbb{D})$. La proposition suivante, dont une version apparaît dans [26, Lemme 2.7], décrit précisément les conditions qui nous assurent que X est un domaine n-connexe :

Proposition 7.4. *Les énoncés suivants sont équivalents :*

(1) $\mathbb{C}_\infty \setminus X$ *possède au moins* n *composantes connexes ;*

(2) X *et* $\mathbb{C}_\infty \setminus X$ *possèdent* 1 *et* n *composantes connexes respectivement ;*

(3) X *est connexe et borné par* n *courbes de Jordan analytiques disjointes ;*

(4) R *envoie chaque composante de* $\mathbb{C}_\infty \setminus X$ *de façon homéomorphe sur* $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{D}$ *;*

(5) Toutes les valeurs critiques de R *sont dans* $\mathbb{D}$*.*

Démonstration. Les implications (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) sont claires.

Supposons que $Y := \mathbb{C}_\infty \setminus X$ possède m composantes connexes, disons $K_1, \ldots, K_m$, où $m \geq n$. Remarquons que pour chaque j, K_j est compact et la restriction $R : K_j \to \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{D}$ est ouverte, ce qui implique que $R(K_j) = \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{D}$, par connexité. Comme le degré de R est n, on doit donc avoir $m = n$. De plus, chacune des restrictions $R : K_j \to \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{D}$ doit être injective et donc un homéomorphisme, car il s'agit d'une bijection continue sur un ensemble compact. Ceci montre que (1) implique (4).

Si R envoie chaque composante de Y de façon homéomorphe sur $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{D}$, alors en particulier ∂Y est constitué d'un nombre fini de courbes de Jordan disjointes. Ceci implique que tout point critique de R ne peut appartenir à ∂Y. Ainsi, comme R est localement injective sur l'intérieur de Y, il suit que chacun des points critiques de R doit appartenir à X, autrement dit, que toutes les valeurs critiques de R sont dans $\mathbb{D}$. Ceci montre que (4) implique (5).

Il reste à montrer que (5) implique (3). Supposons que toutes les valeurs critiques de R sont dans $\mathbb{D}$. Alors R est un revêtement non ramifié de degré n de Y sur $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{D}$. Comme ce dernier est simplement connexe, il découle des propriétés du revêtement universel que Y possède exactement n composantes et que chacune d'entre elles est homéomorphe à $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{D}$. Le complément X de ces domaines de Jordan fermés et disjoints est nécessairement connexe. Enfin, comme R est localement conforme sur ∂X, chacune des courbes frontières de X doit être analytique.

□

Definition 7.5. Une fonction rationnelle R de degré n avec $R(\infty) = 0$ qui satisfait l'une ou l'autre des conditions de la Proposition 7.4 est dite *n-good*.

Remarquons qu'une fonction rationnelle n-good ne peut avoir le point ∞ comme valeur critique, et donc tous ses pôles doivent être simples.

Soit R une fonction rationnelle n-good. En décomposant R en fractions partielles, on obtient que $R = R_{a,b}$ pour un certain $(a, b) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n \times \mathbb{C}^n$, unique à permutation près, où

$$R_{a,b}(z) := \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{z - b_j}.$$

Les nombres complexes non nuls $a_1, ..., a_n$ sont les résidus de R. On déduit donc de cette représentation que $R'(\infty)$ est égal à la somme des résidus de R, soit $\sum_{j=1}^{n} a_j$.

Definition 7.6. On définit $\mathcal{R}(n) \subseteq (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n \times \mathbb{C}^n$ comme étant l'ensemble des (a, b) tels que la fonction rationnelle $R_{a,b}$ est n-good.

Un ensemble similaire, appelé *coefficient body for Bell representations*, fut considéré dans [24] et [26]. Une autre variante de l'ensemble $\mathcal{R}(n)$ fut également étudiée dans [11] en lien avec les travaux de Sharon et Mumford [39] dans la théorie récente de la vision numérique et de la reconnaissance d'image.

Remarquons que l'ensemble $\mathcal{R}(n)$ est invariant sous l'action du groupe symétrique Σ_n.

7.3 Applications de Grunsky et représentations de Bell

Soit $X \subseteq \mathbb{C}_\infty$ un domaine n-connexe non dégénéré contenant le point ∞.

Definition 7.7. Une application holomorphe propre $f : X \to \mathbb{D}$ de degré n avec $f(\infty) = 0$ est appelée *application de Grunsky sur X*.

Remarquons que pour chaque X, la fonction d'Ahlfors $f : X \to \mathbb{D}$ est une application de Grunsky sur X. En effet, à l'aide du théorème de représentation de Riemann, on montre facilement que X est conformément équivalent à un domaine borné par n courbes de Jordan analytiques disjointes. La conclusion découle ensuite directement du Théorème 3.3.

On utilisera à plusieurs reprises le résultat classique suivant :

Lemme 7.8. *Supposons que X est borné par n courbes de Jordan analytiques et disjointes, disons $E_1, \ldots, E_n$, et soit $f : X \to \mathbb{D}$ une application holomorphe propre. Alors f s'étend à une fonction holomorphe $f : \overline{X} \to \overline{\mathbb{D}}$ et il existe un entier m tel que cette extension est de degré m, i.e. chaque point du disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$ possède exactement m préimages dans $\overline{X}$*

en comptant les multiplicités. De plus, $m \geq n$ et si $m = n$, alors pour chaque j, la restriction $f : E_j \to \mathbb{T}$ est un homéomorphisme.

La partie existence du théorème suivant est due à Jeong et Taniguchi [25]. La partie unicité, quant à elle, est nouvelle.

Théorème 7.9 (Théorème de représentation de Bell)**.** *Soit $X \subseteq \mathbb{C}_\infty$ un domaine borné par n courbes de Jordan analytiques disjointes. Soit $f : X \to \mathbb{D}$ une application holomorphe propre de degré n. Alors il existe une fonction rationnelle R de degré n ainsi qu'une application conforme $g : \overline{X} \to \overline{R^{-1}(\mathbb{D})}$ telles que $f = R \circ g$.*

De plus, si $f = Q \circ h$ pour une autre fonction rationnelle Q de degré n et une autre application conforme $h : \overline{X} \to \overline{Q^{-1}(\mathbb{D})}$, alors il existe une transformation de Möbius M telle que $Q = R \circ M^{-1}$ et $h = M \circ g$.

Démonstration. Pour une preuve de la première partie du théorème, voir [25] ou encore [14].

Pour la partie unicité, supposons que f se factorise aussi sous la forme $f = Q \circ h$. Remarquons que R et Q sont n-good puisque X est n-connexe et $g : \overline{X} \to \overline{R^{-1}(\mathbb{D})}$, $h : \overline{X} \to \overline{Q^{-1}(\mathbb{D})}$ sont conformes. Soit $K_1, \ldots, K_n$ les composantes connexes de $R^{-1}(\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{D})$ et $L_1, \ldots, L_n$, les composantes connexes de $Q^{-1}(\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{D})$, numérotées de sorte que l'application conforme

$$h \circ g^{-1} : \overline{R^{-1}(\mathbb{D})} \to \overline{Q^{-1}(\mathbb{D})}$$

envoie ∂K_j vers ∂L_j pour chaque j.

Par la Proposition 7.4, R envoie chacune des composantes K_j de façon homéomorphe sur $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{D}$, et similairement pour Q. Définissons une application $M : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ par

$$M(z) := \begin{cases} h \circ g^{-1}(z) & \text{pour } z \in R^{-1}(\mathbb{D}) \\ Q^{-1} \circ R(z) & \text{pour } z \in R^{-1}(\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{D}) \end{cases},$$

où la fonction $Q^{-1} \circ R$ est choisie de sorte qu'elle envoie K_j vers L_j. Alors M est un homéomorphisme, conforme sur le complément de $\partial R^{-1}(\mathbb{D})$. Or $\partial R^{-1}(\mathbb{D})$ est composé de n courbes de Jordan analytiques et disjointes. Ainsi, par le théorème de Morera, on déduit que M est conforme sur la sphère de Riemann, et est donc une transformation de Möbius. Enfin, par construction, $Q \circ M = R$ et $M \circ g = h$. □

Corollaire 7.10. *Tout domaine n-connexe non dégénéré est conformément équivalent à un domaine de la forme $R^{-1}(\mathbb{D})$, pour une certaine fonction rationnelle R de degré n.*

Démonstration. Ceci découle directement de la remarque précédent le Lemme 7.8 et du Théorème 7.9. □

Si l'on requiert que la fonction g du Théorème 7.9 soit normalisée d'une certaine façon, alors la factorisation $f = R \circ g$ est unique.

Definition 7.11. Soit h une fonction méromorphe au voisinage du point ∞. On dit que h est *normalisée à l'infini* si

$$\lim_{z\to\infty} (h(z) - z) = 0;$$

autrement dit, si h possède un développement de Laurent au voisinage du point ∞ de la forme

$$h(z) = z + \frac{d_1}{z} + \frac{d_2}{z^2} + \dots$$

Notons que la seule transformation de Möbius normalisée à l'infini est l'identité.

Corollaire 7.12. *Soit X un domaine n-connexe non dégénéré contenant le point ∞ et soit $f : X \to \mathbb{D}$ une application de Grunsky sur X. Alors il existe une unique fonction rationnelle n-good R et une unique application conforme $g : X \to R^{-1}(\mathbb{D})$ normalisée à l'infini telles que $f = R \circ g$.*

Démonstration. En appliquant le théorème de représentation de Riemann à n reprises, on peut supposer que X est borné par n courbes de Jordan analytiques disjointes. Soit $f = R \circ g$ une factorisation comme dans le Théorème 7.9. Quitte à composer g par une transformation de Möbius et R par son inverse, on peut supposer que g est normalisée à l'infini. Alors on a que $R(\infty) = R(g(\infty)) = f(\infty) = 0$ et que $R^{-1}(\mathbb{D}) = g(X)$ est n-connexe, donc R est n-good. Soit $f = Q \circ h$ une autre factorisation, où h est normalisée à l'infini et Q est n-good. Par la seconde partie du Théorème 7.9, il existe une transformation de Möbius M telle que $Q = R \circ M^{-1}$ et $h = M \circ g$. Au voisinage du point ∞, on a $M = h \circ g^{-1}$, et donc M est normalisée à l'identité à l'infini. Par conséquent, M est l'identité. □

Definition 7.13. La paire (R, g) du Corollaire 7.12 est appelée *représentation de Bell de X associée à f*.

Remarque. Le Corollaire 7.12 illustre à merveille l'intérêt d'une étude approfondie du problème de Jeong–Taniguchi. En effet, si X est un domaine contenant le point ∞ et borné par n courbes de Jordan analytiques disjointes, alors la fonction d'Ahlfors $f : X \to \mathbb{D}$ est une application de Grunsky sur X. Ainsi, par le Corollaire 7.12, f peut se factoriser sous la forme $f = R \circ g$, où R est n-good et $g : X \to R^{-1}(\mathbb{D})$ est une application conforme normalisée à l'infini. Par la Proposition 3.7, R est une fonction d'Ahlfors rationnelle de degré n. En combinant ceci avec le théorème de représentation de Riemann, on obtient donc que toute fonction d'Ahlfors sur un domaine n-connexe non dégénéré contenant le point ∞ est conformément équivalente à une fonction d'Ahlfors rationnelle de degré n. Autrement dit, résoudre le Problème 7.2 fournirait une description précise d'essentiellement toutes les fonctions d'Ahlfors, augmentant par le fait même de façon considérable notre compréhension de la capacité analytique.

Soit $X \subseteq \mathbb{C}_\infty$ un domaine contenant le point ∞ et borné par n courbes de Jordan analytiques et disjointes, disons $E_1, \ldots, E_n$. Si f est une application de Grunsky sur X, alors pour chaque j, la restriction $f : E_j \to \mathbb{T}$ est un homéomorphisme. En particulier, il existe un unique $\alpha_j \in E_j$ tel que $f(\alpha_j) = 1$. Le résultat suivant stipule que tout n-tuple $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ peut être obtenu de la sorte :

Théorème 7.14 (Bieberbach [6], Grunsky [21])**.** *Soit $\alpha_j \in E_j$ pour chaque j. Alors il existe une application holomorphe propre $f : \overline{X} \to \overline{\mathbb{D}}$ de degré n telle que $f(\alpha_j) = 1$ pour chaque j. De plus, si $g : \overline{X} \to \overline{\mathbb{D}}$ est une autre application holomorphe propre de degré n avec $g(\alpha_j) = 1$ pour chaque j, alors $g = M \circ f$, où M est un automorphisme du disque unité avec $M(1) = 1$.*

Démonstration. Voir par exemple [5, Théorème 2.2] ou encore [27, Théorème 3]. □

Pour obtenir l'unicité, il suffit d'introduire une certaine normalisation :

Corollaire 7.15. *Soit $X \subseteq \mathbb{C}_\infty$ un domaine contenant le point ∞ et borné par les courbes de Jordan analytiques $E_1, \ldots, E_n$, et soit $\alpha_j \in E_j$ pour chaque j. Alors il existe une unique application de Grunsky f sur X telle que $f(\alpha_j) = 1$ pour chaque j.*

Démonstration. Soit $g : \overline{X} \to \overline{\mathbb{D}}$ une application holomorphe propre de degré n avec $g(\alpha_j) = 1$ pour chaque j, comme dans le Théorème 7.14. Définissons

$$f(z) := \frac{(1 - \overline{g(\infty)})}{(1 - g(\infty))} \frac{(g(z) - g(\infty))}{(1 - \overline{g(\infty)} g(z))}.$$

Alors $f : \overline{X} \to \overline{\mathbb{D}}$, étant la composition de g par un automorphisme du disque unité, est aussi une application holomorphe propre de degré n. De plus, $f(\infty) = 0$, donc f est une application de Grunsky sur X, et $f(\alpha_j) = 1$ pour chaque j.

Si h est une autre application de Grunsky sur X avec $h(\alpha_j) = 1$ pour chaque j, alors $h = M \circ f$ pour un certain automorphisme M du disque unité fixant le point 1. Or $M(0) = M(f(\infty)) = h(\infty) = 0$ et donc M doit être l'identité. □

Definition 7.16. La fonction f du Corollaire 7.15 est appelée *application de Grunsky sur X pour* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Chapitre 8

Exemples de fonctions d'Ahlfors rationnelles

8.1 Fonctions d'Ahlfors rationnelles admettant une symétrie de réflexion

Dans cette section, on détermine explicitement une famille de fonctions d'Ahlfors rationnelles de degré n, pour tout entier $n \geq 2$. Pour chaque fonction rationnelle R de cette famille, le domaine $R^{-1}(\mathbb{D})$ admet une symétrie de réflexion, ce qui permet de montrer que la fonction d'Ahlfors f sur $R^{-1}(\mathbb{D})$ prend la valeur 1 exactement aux mêmes points que R. Ainsi, par la partie unicité du Corollaire 7.15, on déduit que $f = R$ et donc que R est une fonction d'Ahlfors rationnelle.

Théorème 8.1. *Définissons*

$$R(z) := \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{z - p_j},$$

où les pôles $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ sont distincts et réels, et les résidus $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont positifs. Supposons que $R^{-1}(\mathbb{D})$ est n-connexe, autrement dit, que R est n-good. Alors R est la fonction d'Ahlfors sur $R^{-1}(\mathbb{D})$.

Remarque. Par la Proposition 7.3, pour chaque $b \neq 0$ et chaque $c \in \mathbb{C}$, la fonction R est une fonction d'Ahlfors rationnelle si et seulement si $(b/|b|)R(bz + c)$ l'est aussi. Le Théorème 8.1 entraîne donc que toute fonction rationnelle n-good dont les pôles sont colinéaires et dont les résidus sont positifs est une fonction d'Ahlfors rationnelle.

On aura besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 8.2. *Soit R comme dans le Théorème 8.1. Alors R est réelle seulement sur l'axe réel, et $\partial R^{-1}(\mathbb{D}) \cap \mathbb{R}$ est constitué de $2n$ points $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \cdots < \alpha_n < \beta_n$ tels que $R(\alpha_j) = -1$ et $R(\beta_j) = 1$ pour chaque j.*

Démonstration. Puisque $a_1, \ldots, a_n, p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}$, on a que $R(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. De plus, on a

$$R'(z) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{(z-p_j)^2},$$

quantité strictement négative sur $\mathbb{R} \setminus \{p_1, ..., p_n\}$.

Ainsi, R décroît de 0 à $-\infty$ sur $(-\infty, p_1)$, puis décroît de $+\infty$ à $-\infty$ sur (p_j, p_{j+1}) pour $j = 1, ..., n-1$, et enfin décroît de $+\infty$ à 0 sur $(p_n, +\infty)$. En particulier, R prend chaque valeur réelle exactement n fois sur $\mathbb{R}$. Comme R est de degré n, on déduit que $R^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Puisque $\partial R^{-1}(\mathbb{D}) = R^{-1}(\partial \mathbb{D})$, on a que $(\partial R^{-1}(\mathbb{D})) \cap \mathbb{R} = R^{-1}(\{-1, 1\})$. Comme R est strictement décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \{p_1, ..., p_n\}$, il suit que $R(\alpha_j) = -1$ et $R(\beta_j) = 1$ pour chaque j.

□

Lemme 8.3. *Soit E l'union d'un nombre fini d'intervalles fermés et disjoints contenus dans l'axe réel, disons*

$$E := \cup_{j=1}^{n} [c_j, d_j],$$

où $c_j < d_j$ pour chaque j. Alors la fonction d'Ahlfors pour E est donnée par

$$\frac{\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{z-c_j}{z-d_j}\right)^{1/2} - 1}{\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{z-c_j}{z-d_j}\right)^{1/2} + 1}$$

et en particulier est réelle et décroissante sur $\mathbb{R} \setminus E$.

Démonstration. Sur $\mathbb{C} \setminus E$, définissons

$$g(z) := \frac{1}{2} \int_E \frac{dt}{z-t}$$

et

$$f(z) := \frac{e^{g(z)} - 1}{e^{g(z)} + 1}.$$

Alors par le Corollaire 2.18, f est la fonction d'Ahlfors pour E. Un calcul simple montre que

$$f(z) = \frac{\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{z-c_j}{z-d_j}\right)^{1/2} - 1}{\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{z-c_j}{z-d_j}\right)^{1/2} + 1}.$$

Clairement, g et f sont réelles sur $\mathbb{R} \setminus E$ et g est strictement décroissante sur $\mathbb{R} \setminus E$. Puisque la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ et que $h(z) = (z-1)/(z+1)$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on déduit que f est décroissante sur $\mathbb{R} \setminus E$.

□

On peut maintenant démontrer le Théorème 8.1 :

Démonstration du Théorème 8.1. Soit f la fonction d'Ahlfors sur le domaine n-connexe $X := R^{-1}(\mathbb{D})$. Alors $f : \overline{X} \to \overline{\mathbb{D}}$ est une application de Grunsky sur X. Soit $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \cdots < \alpha_n < \beta_n$ les points d'intersection de ∂X avec $\mathbb{R}$. Montrons que $f(\beta_j) = 1$ pour chaque j.

Remarquons d'abord que X est symétrique par rapport à l'axe réel, puisque $\overline{R(\overline{z})} = R(z)$. De plus, comme R est n-good, chaque composante de ∂X est une courbe de Jordan symétrique par rapport à l'axe réel. Il est facile de voir que dans ce cas, $X \cap \mathbb{H}$ est un domaine de Jordan, où $\mathbb{H}$ est le demi-plan supérieur. Soit $\psi : \overline{X \cap \mathbb{H}} \to \overline{\mathbb{H}}$ un homéomorphisme, conforme sur $X \cap \mathbb{H}$, avec $\psi(\infty) = \infty$. On peut étendre ψ à X en entier grâce au principe de réflexion de Schwarz. La fonction résultante φ est une application conforme de X sur Y, le complément dans $\mathbb{C}_\infty$ de n intervalles fermés et disjoints contenus dans l'axe réel. Puisque ψ préserve l'orientation sur la frontière, on a que φ est strictement croissante sur $X \cap \mathbb{R}$. En particulier, $\lim_{z\to\infty} \varphi(z)/z > 0$.

Soit g la fonction d'Ahlfors sur Y. Par la loi de transformation des fonctions d'Ahlfors sous application conforme (Proposition 3.7), on a que $f = g \circ \varphi$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $X \cap \mathbb{R}$, puisque φ y est strictement croissante et g est strictement décroissante sur $Y \cap \mathbb{R} = \varphi(X \cap \mathbb{R})$, par le Lemme 8.3. De plus, on a que $f(\partial X \cap \mathbb{R}) \subseteq \partial\mathbb{D} \cap \mathbb{R} = \{-1, 1\}$, et donc $f(\alpha_j) = -1$ et $f(\beta_j) = 1$ pour chaque $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Enfin, R est aussi une application de Grunsky sur X avec $R(\beta_j) = 1$ pour chaque j, par le Lemme 8.2. Ainsi, par le Corollaire 7.15, $f = R$. □

Le résultat suivant est une réciproque partielle du Théorème 8.1 :

Théorème 8.4. *Soit R une fonction rationnelle de degré n dont tous les pôles et les résidus sont réels. Si R est une fonction d'Ahlfors rationnelle, alors tous ses résidus doivent être positifs.*

Démonstration. Posons $X := R^{-1}(\mathbb{D})$. Rappelons d'abord que puisque la fonction R est n-good, elle ne peut avoir que des pôles simples. Montrons maintenant que R ne peut avoir de point critique sur $X \cap \mathbb{R}$.

L'hypothèse sur les pôles et les résidus entraîne que $\overline{R(\overline{z})} = R(z)$. Ainsi, comme dans la preuve du Théorème 8.1, il existe une application conforme φ de X sur Y, le complément dans la sphère de Riemann d'un nombre fini d'intervalles fermés et disjoints contenus dans l'axe réel, telle que $\varphi(\infty) = \infty$ et φ est strictement croissante sur $X \cap \mathbb{R}$.

Soit g la fonction d'Ahlfors sur Y. On vérifie facilement à l'aide du Lemme 8.3 que g n'a pas de point critique dans $Y \cap \mathbb{R}$. Ceci est également vrai pour R sur $X \cap \mathbb{R}$, puisque comme R est la fonction d'Ahlfors sur X, on a que $R = g \circ \varphi$ par la Proposition 3.7.

Maintenant, comme R est la fonction d'Ahlfors sur X, la somme de ses résidus $R'(\infty)$ est positive. Ainsi, au moins l'un d'entre eux doit être positif. Si l'un d'eux est négatif, alors il doit forcément y avoir deux pôles consécutifs p_j et p_{j+1} tels que les résidus correspondants ont des signes opposés. Ainsi,

$$\lim_{t\to p_j^+} R(t) = \lim_{t\to p_{j+1}^-} R(t) = \pm\infty$$

et donc R possède un point critique dans l'intervalle (p_j, p_{j+1}). Or, par la Proposition 7.4, celui-ci doit appartenir à X. Il suit que R possède un point critique dans $X \cap \mathbb{R}$, ce qui est une contradiction. Ainsi, tous les résidus de R doivent être positifs. □

On conclut cette section avec la question suivante :

Question 8.5. *Soit R une fonction rationnelle n-good telle que $R(z) = \overline{R(\bar{z})}$ pour tout z. Supposons de plus que tous les résidus de R sont positifs. Alors R est-elle une fonction d'Ahlfors rationnelle ?*

On reviendra à cette question dans l'exemple 8.4.5.

8.2 Fonctions d'Ahlfors rationnelles avec symétrie rotationnelle

Dans cette section, on présente une seconde famille de fonctions d'Ahlfors rationnelles. Pour chaque fonction R appartenant à cette dernière, $R^{-1}(\mathbb{D})$ admet une symétrie rotationnelle, ce qui permet de montrer que la fonction d'Ahlfors f sur ce domaine possède les mêmes zéros que R. On déduit ensuite que $f = R$.

Théorème 8.6. *Soit $n \geq 2$, $0 < a < n(n-1)^{(1-n)/n}$ et $R(z) := az^{n-1}/(z^n - 1)$. Alors R est une fonction d'Ahlfors rationnelle.*

Démonstration. D'abord, remarquons que

$$R'(z) = -az^{n-2}\frac{z^n + (n-1)}{(z^n-1)^2}.$$

Soit $q = e^{i\pi/n}$ et $\omega = q^2$. Les points critiques de R sont

$$(n-1)^{1/n}q, \omega(n-1)^{1/n}q, \ldots, \omega^{n-1}(n-1)^{1/n}q$$

et 0 avec multiplicité $n-2$. De plus, $R(0) = 0$ et

$$|R(\omega^k(n-1)^{1/n}q)| = a(n-1)^{(n-1)/n}/n < 1,$$

et donc $X := R^{-1}(\mathbb{D})$ est connexe et borné par n courbes de Jordan analytiques et disjointes, par la Proposition 7.4.

Soit f la fonction d'Ahlfors sur X. Alors $f : \overline{X} \to \overline{\mathbb{D}}$ est une application de Grunsky. Montrons que f possède les mêmes zéros que R, c'est-à-dire un zéro simple au point ∞ et un zéro de multiplicité $n-1$ à l'origine.

Un calcul direct montre que $\omega R(\omega z) = R(z)$ et donc $\omega X = X$. Ceci entraîne que $\omega f(\omega z) = f(z)$, puisque le côté gauche est holomorphe sur X, à valeurs dans $\mathbb{D}$ et possède la même dérivée au point ∞ que f. Supposons que f s'annule en un certain point $z \in X, z \neq 0, \infty$. Alors f doit s'annuler aux points $z, \omega z, \ldots, \omega^{n-1} z$ et ∞, un total de $n+1$ points distincts, ce qui est impossible puisque f est de degré n. Ainsi, 0 et ∞ sont les seuls zéros de f. Or, $f'(\infty) > 0$ et donc le zéro au point ∞ est simple. Par conséquent, le zéro à l'origine doit être de multiplicité $n-1$.

Il découle de ceci que f/R et R/f sont toutes deux holomorphes sur X. Puisque $|f/R| \equiv 1$ sur ∂X, le principe du maximum appliqué aux deux quotients entraîne que $|f/R| \equiv 1$ sur X. Enfin, par le principe de l'application ouverte, f/R est une constante unimodulaire. Mais $f'(\infty)$ et $R'(\infty) = a$ sont tous deux positifs, d'où l'on déduit que $f = R$. □

Remarque. Pour $n = 2$, le Théorème 8.6 affirme que $R(z) = az/(z^2-1) = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}\right)$ est une fonction d'Ahlfors rationnelle et ce, pour chaque $a \in (0,2)$. Bien sûr, cela découle directement du Théorème 8.1, mais la preuve ci-dessus est plus élémentaire. Posons $M(z) := \frac{z+i}{z-i}$. Alors

$$J(z) := iR \circ M(z) = i\frac{a}{2}\left(\frac{z-i}{2z} + \frac{z-i}{2i}\right) = \frac{a}{4}(z + 1/z)$$

est la fonction d'Ahlfors sur $J^{-1}(\mathbb{D})$ par rapport au point $i = M^{-1}(\infty)$, par la loi de transformation des fonctions d'Ahlfors sous application conforme. Ceci fut démontré dans [4] par un argument nettement plus compliqué.

La fonction rationnelle $R(z) := az^{n-1}/(z^n - 1)$ peut s'écrire sous la forme

$$\frac{a}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - \omega^j},$$

et donc R a le même résidu, a/n, en chacun de ses pôles. Les pôles de R forment un n-gone régulier de rayon 1 centré en l'origine. Par la Proposition 7.3, $(b/|b|)R(bz + c)$ est également une fonction d'Ahlfors rationnelle et ce, pour chaque $b \neq 0$ et chaque $c \in \mathbb{C}$. Ainsi, toute fonction rationnelle ayant n pôles simples formant un n-gone régulier de rayon ρ avec résidus correspondants tous égaux à $r > 0$ est une fonction d'Ahlfors rationnelle si l'inégalité

$$r/\rho < (n-1)^{(1-n)/n}$$

est satisfaite.

8.3 Fonctions d'Ahlfors rationnelles de degré 2

Dans cette section, on donne une solution complète au Problème 7.2 en degré $n = 2$.

Théorème 8.7. *Une fonction rationnelle R de degré deux est une fonction d'Ahlfors rationnelle si et seulement si elle s'écrit sous la forme*

$$R(z) = \frac{a_1}{z - p_1} + \frac{a_2}{z - p_2},$$

où $p_1, p_2 \in \mathbb{C}$ sont distincts et a_1, a_2 sont des nombres réels positifs satisfaisant $a_1 + a_2 < |p_1 - p_2|$.

Démonstration. Par la Proposition 7.3, il suffit de montrer qu'une fonction rationnelle de degré 2 avec pôles en 0 et 1 est une fonction d'Ahlfors rationnelle si et seulement si elle peut s'écrire sous la forme

$$R(z) = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z - 1},$$

où a_1, a_2 sont des nombres réels positifs satisfaisant $a_1 + a_2 < 1$.

($\Leftarrow$) Les points critiques de R sont les solutions de l'équation

$$a_1(z - 1)^2 + a_2 z^2 = 0,$$

données par

$$\frac{a_1 \pm i\sqrt{a_1 a_2}}{a_1 + a_2}.$$

Un calcul élémentaire montre que les valeurs critiques correspondantes sont

$$(a_1 - a_2) \mp 2\sqrt{a_1 a_2} i$$

et que leur module est $a_1 + a_2$, quantité strictement inférieure à 1 par hypothèse.

Par la Proposition 7.4, $R^{-1}(\mathbb{D})$ est doublement connexe. Il découle ensuite du Théorème 8.1 que R est une fonction d'Ahlfors rationnelle.

($\Rightarrow$) Supposons que R est une fonction d'Ahlfors rationnelle de degré 2 avec pôles en 0 et 1 et écrivons

$$R(z) = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z - 1},$$

où $a_1, a_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. On doit montrer que les résidus a_1 et a_2 sont en fait positifs.

Montrons d'abord que a_1 et a_2 sont réels, autrement dit, que R est égale à

$$Q(z) := \overline{R(\bar{z})} = \frac{\overline{a_1}}{z} + \frac{\overline{a_2}}{z - 1}.$$

Tout d'abord, on affirme qu'il existe une application conforme $g : R^{-1}(\mathbb{D}) \to Q^{-1}(\mathbb{D})$ satisfaisant $g(\infty) = \infty$ et $\lim_{z \to \infty} g(z)/z = \lambda$ pour un $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| = 1$.

En effet, par hypothèse, $R^{-1}(\mathbb{D})$ est un domaine doublement connexe et est donc conformément équivalent à un anneau circulaire. Par conséquent, il existe une involution anticonforme $J : R^{-1}(\mathbb{D}) \to R^{-1}(\mathbb{D})$ fixant le point ∞ de même que chacune des courbes frontières. Puisque la conjugaison complexe envoie $R^{-1}(\mathbb{D})$ sur $Q^{-1}(\mathbb{D})$, $g(z) = \overline{J(z)}$ est l'application conforme cherchée. La limite $\lambda = \lim_{z\to\infty} \overline{J(z)}/z$ est unimodulaire puisque $J \circ J = \mathrm{id}$.

Considérons maintenant $\lambda Q \circ g$. Il s'agit d'une fonction holomorphe de $R^{-1}(\mathbb{D})$ vers $\mathbb{D}$ telle que

$$(\lambda Q \circ g)'(\infty) = Q'(\infty) = \overline{R'(\infty)} = R'(\infty),$$

où l'on a utilisé le fait que $R'(\infty) > 0$, puisque R est une fonction d'Ahlfors rationnelle. Par unicité de la fonction d'Ahlfors, il suit que

$$R = \lambda Q \circ g.$$

Maintenant, par la partie unicité du Théorème 7.9, on obtient que g est la restriction d'une transformation de Möbius pour laquelle l'égalité $R = \lambda Q \circ g$ est valide sur $\mathbb{C}_\infty$ en entier. Par construction, g envoie chacune des courbes frontières de $R^{-1}(\mathbb{D})$ sur son image par conjugaison complexe, et donc $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. Puisque $g(\infty) = \infty$, ceci entraîne que g est l'identité. Ainsi, $\lambda = 1$ et $R = Q$.

Ceci montre que les résidus a_1 et a_2 de R sont réels. Par le Théorème 8.4, ceux-ci doivent être positifs. Enfin, leur somme $a_1 + a_2$ doit être strictement inférieure à 1 pour que $R^{-1}(\mathbb{D})$ soit doublement connexe, en vertu du calcul de la première partie de la preuve.

□

8.4 Exemples numériques

Les résultats des sections précédentes semblent indiquer qu'une fonction rationnelle n-good dont tous les résidus sont positifs est forcément une fonction d'Ahlfors rationnelle. La méthode numérique du chapitre 5 pour le calcul de la capacité analytique nous a permis d'effectuer différentes expérimentations afin de vérifier cette intuition. Dans cette section, on présente d'abord quelques exemples numériques dans le but d'illustrer les résultats obtenus précédemment. On donne par la suite un exemple numérique d'une fonction rationnelle 3-good dont les résidus sont positifs mais qui n'est pas une fonction d'Ahlfors rationnelle. Ainsi, il s'avère qu'en général, la positivité des résidus n'est pas une condition suffisante pour être une fonction d'Ahlfors rationnelle. On verra au chapitre 9 que cette condition n'est pas non plus nécessaire.

Dans les exemples numériques subséquents, on s'intéresse au calcul de la capacité analytique d'ensembles compacts de la forme

$$K = \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| \geq 1\},$$

où R est une fonction rationnelle n-good. En vertu de certaines considérations numériques, on se restreindra au cas où le degré n de R est au plus 3.

La méthode du chapitre 5 fait intervenir le calcul d'intégrales sur la frontière de K, par rapport à la mesure de longueur d'arc. Conséquemment, une première étape demeure l'obtention d'une paramétrisation de la frontière, ce qui s'effectue en résolvant pour z l'équation $R(z) = e^{it}$. Ceci équivaut à déterminer les racines d'un polynôme de degré au plus 3, ce qui s'accomplit facilement à l'aide du logiciel MAPLE. La deuxième étape consiste en l'utilisation de la méthode du chapitre 5 pour obtenir des bornes inférieures et supérieures pour la capacité analytique $\gamma(K)$. Cette partie du travail numérique est effectuée à l'aide du logiciel MATLAB. Enfin, mentionnons que toutes les intégrales ont été calculées numériquement avec la méthode de quadrature adaptative de Gauss-Kronrod et une précision de 10^{-9}.

Exemple 8.4.1.

$$R(z) = \frac{0.2}{z-1} + \frac{0.3}{z+1}.$$

La figure ci-dessous représente la frontière du compact $K := \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| \geq 1\}$:

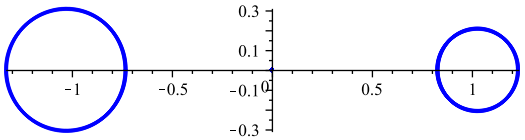

FIGURE 8.1: La frontière de K pour l'exemple 8.4.1

La Table 8.1 contient les bornes pour $\gamma(K)$ obtenues avec la méthode. Les fonctions d'approximation utilisées sont $\{(z \pm 1)^{-j} : 1 \leq j \leq n\}$.

TABLE 8.1: Bornes inférieures et supérieures pour $\gamma(K)$ pour l'exemple 8.4.1

n	Borne inférieure pour $\gamma(K)$	Borne supérieure pour $\gamma(K)$
1	0.492562045464946	0.500047419736669
2	0.499952584760167	0.500003281768904
3	0.499996718252636	0.500000110442346
4	0.499999889557678	0.500000003956031
5	0.499999996043969	0.500000000292436

Par le Théorème 8.7, R est la fonction d'Ahlfors pour K et donc

$$\gamma(K) = R'(\infty) = 0.2 + 0.3 = 0.5.$$

Les valeurs numériques obtenues sont donc cohérentes.

Exemple 8.4.2.

$$R(z) = \frac{0.95}{z+1} + \frac{0.98}{z-1}.$$

La figure ci-dessous représente la frontière du compact $K := \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| \geq 1\}$. Celle-ci est constituée de deux courbes de Jordan analytiques, non convexes et disjointes.

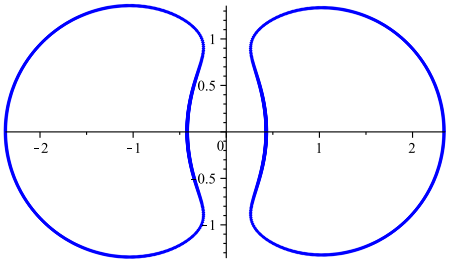

FIGURE 8.2: La frontière de K pour l'exemple 8.4.2

La Table 8.2 contient les bornes pour $\gamma(K)$ obtenues avec la méthode. Les fonctions d'approximation utilisées sont $\{(z \pm 1)^{-j} : 1 \leq j \leq n\}$.

TABLE 8.2: Bornes inférieures et supérieures pour $\gamma(K)$ pour l'exemple 8.4.2

n	Borne inférieure pour $\gamma(K)$	Borne supérieure pour $\gamma(K)$
1	1.469145654305464	1.998883274734441
2	1.863490503463674	1.997657625980182
3	1.864633834925701	1.957570768708159
4	1.902817542815138	1.956984859867938
5	1.903387234304595	1.944734961210238
10	1.924138647216576	1.935693736889831
20	1.928820666790728	1.931123140362772
30	1.929615838914482	1.930334911010434
35	1.929706466138935	1.930230869959049
40	1.929751020215389	1.930091261090859

Par le Théorème 8.7, R est la fonction d'Ahlfors pour K et donc

$$\gamma(K) = R'(\infty) = 0.95 + 0.98 = 1.93.$$

Encore une fois, les résultats numériques obtenus sont cohérents avec la valeur prédite, même si la convergence est plus lente dans ce cas-ci.

Exemple 8.4.3.

$$R(z) = \frac{0.1}{z} + \frac{0.2}{z+2} + \frac{0.4}{z-5}.$$

La figure ci-dessous représente la frontière du compact $K := \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| \geq 1\}$:

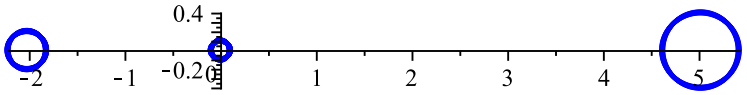

FIGURE 8.3: La frontière de K pour l'exemple 8.4.3

La Table 8.3 contient les bornes pour $\gamma(K)$ obtenues avec la méthode. Les fonctions d'approximation utilisées sont $\{(z-a)^{-j} : 1 \leq j \leq n, a \in S\}$, où $S = \{0, -2, 5\}$.

TABLE 8.3: Bornes inférieures et supérieures pour $\gamma(K)$ pour l'exemple 8.4.3

n	Borne inférieure pour $\gamma(K)$	Borne supérieure pour $\gamma(K)$
1	0.696735209508754	0.700011861859377
2	0.699988138057939	0.700000163885012
3	0.699999835775098	0.700000002518033

Par le Théorème 8.1, R est la fonction d'Ahlfors pour K et donc

$$\gamma(K) = R'(\infty) = 0.7.$$

Exemple 8.4.4.

$$R(z) = \frac{z^2}{z^3 - 1}.$$

La figure ci-dessous représente la frontière du compact $K := \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| \geq 1\}$:

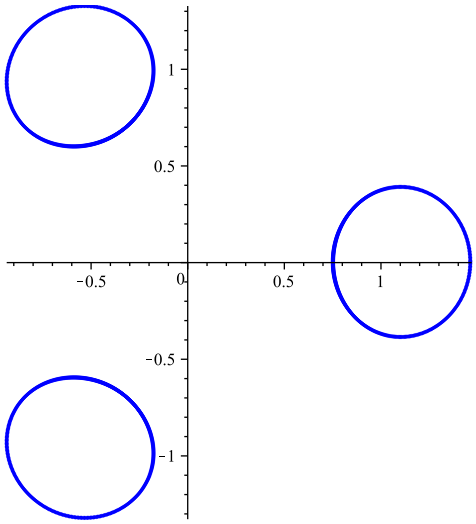

FIGURE 8.4: La frontière de K pour l'exemple 8.4.4

La Table 8.4 contient les bornes pour $\gamma(K)$ obtenues avec la méthode. Les fonctions d'approximation utilisées sont $\{(z-a)^{-j} : 1 \leq j \leq n, a \in S\}$, où $S = \{1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}\}$.

TABLE 8.4: Bornes inférieures et supérieures pour $\gamma(K)$ pour l'exemple 8.4.4

n	Borne inférieure pour $\gamma(K)$	Borne supérieure pour $\gamma(K)$
1	0.897012961211562	1.003766600572323
2	0.996247533470256	1.000449247199905
3	0.999550954532515	1.000227970885994
4	0.999772081072887	1.000015305500631
5	0.999984694733624	1.000004234543914
6	0.999995765474017	1.000002049275081

Par le Théorème 8.6, R est la fonction d'Ahlfors pour K et donc

$$\gamma(K) = R'(\infty) = 1.$$

Exemple 8.4.5. Le prochain exemple illustre la Question 8.5 d'un point de vue numérique. Considérons

$$R(z) = \frac{0.5}{z} + \frac{0.4}{z-(2+i)} + \frac{0.4}{z-(2-i)},$$

une fonction rationnelle à résidus positifs satisfaisant $\overline{R(\bar{z})} = R(z)$ pour tout z.

La figure ci-dessous représente la frontière du compact $K := \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| \geq 1\}$:

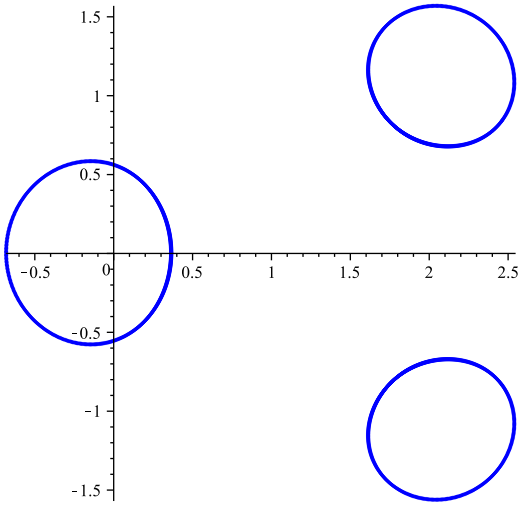

FIGURE 8.5: La frontière de K pour l'exemple 8.4.5

La Table 8.5 contient les bornes pour $\gamma(K)$ obtenues avec la méthode. Les fonctions d'approximation utilisées sont $\{(z-a)^{-j} : 1 \leq j \leq n, a \in S\}$, où $S = \{0, 2+i, 2-i\}$.

TABLE 8.5: Bornes inférieures et supérieures pour $\gamma(K)$ pour l'exemple 8.4.5

n	Borne inférieure pour $\gamma(K)$	Borne supérieure pour $\gamma(K)$
1	1.156483451112665	1.306262607579208
2	1.293906716808142	1.300866124135705
3	1.299286594644695	1.300451765037035
4	1.299697642245979	1.300120036845019

Les résultats numériques obtenus suggèrent donc que $\gamma(K) = 1.3 = R'(\infty)$ ou, de façon équivalente, que R est une fonction d'Ahlfors rationnelle. Ceci s'est révélé être le cas pour toutes les telles fonctions rationnelles symétriques testées numériquement. La réponse à la Question 8.5 semble donc être positive, du moins en degré 3.

Exemple 8.4.6. Ce dernier exemple montre que la positivité des résidus n'est pas une condition suffisante pour être une fonction d'Ahlfors rationnelle et ce, même en degré 3. Définissons

$$R(z) = \frac{0.4}{z} + \frac{0.4}{z-6} + \frac{0.4}{z-(1+i)}.$$

La figure ci-dessous représente la frontière du compact $K := \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| \geq 1\}$:

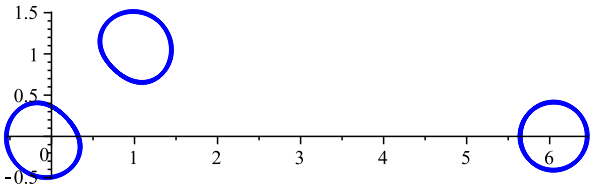

FIGURE 8.6: La frontière de K pour l'exemple 8.4.6

La Table 8.6 contient les bornes pour $\gamma(K)$ obtenues avec la méthode. Les fonctions d'approximation utilisées sont $\{(z-a)^{-j} : 1 \leq j \leq n, a \in S\}$, où $S = \{0, 6, 1+i\}$.

TABLE 8.6: Bornes inférieures et supérieures pour $\gamma(K)$ pour l'exemple 8.4.6

n	Borne inférieure pour $\gamma(K)$	Borne supérieure pour $\gamma(K)$
1	1.125853723035751	1.203267502101022
2	1.197416632904951	1.201353200697178
3	1.199380567900335	1.200524665448821
4	1.200219059439418	1.200426277666660
5	1.200321460719667	1.200387399481300
6	1.200361472698255	1.200378783416171
7	1.200370456320151	1.200375934512287

Ainsi, R n'est pas la fonction d'Ahlfors pour K puisque $R'(\infty) = 1.2 < \gamma(K)$.

Chapitre 9

Une approche topologique

Tout au long de ce chapitre, on s'intéressera au problème de Jeong–Taniguchi (Problème 7.2) d'un point de vue topologique. La section 9.1 contient les différents préliminaires sur la convergence de domaines au sens de Carathéodory. Puis, à la section 9.2, on utilise le théorème de représentation de Koebe pour définir une topologie sur l'espace des modules $\mathcal{M}(n)$, l'ensemble des classes d'isomorphisme de domaines contenant le point ∞ et bornés par n courbes de Jordan analytiques et disjointes. La section 9.3, quant à elle, est dédiée à la topologie sur $\mathcal{R}(n)$, l'ensemble des $(a, b) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n \times \mathbb{C}^n$ tels que la fonction rationnelle

$$R_{a,b}(z) := \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{z - b_j}$$

est n-good. Dans la section 9.4, on démontre plusieurs théorèmes de convergence pour les représentations de Bell, les applications de Grunsky ainsi que les fonctions d'Ahlfors. La section 9.5 contient le résultat principal de ce chapitre. On utilise les théorèmes de convergence mentionnés précédemment pour construire un homéomorphisme entre $\mathcal{R}(n)$ et $\mathcal{M}(n) \times \mathbb{T}^n$. Notons que $\mathcal{M}(n)$ est homotopiquement équivalent à l'espace de configuration

$$\mathcal{F}_n\mathbb{C} := \{(c_1, ..., c_n) \in \mathbb{C}^n : c_i \neq c_j \text{ pour } i \neq j\},$$

et donc l'homéomorphisme construit améliore un résultat de Jeong–Taniguchi [26, Théorème 2.4] stipulant que $\mathcal{R}(n)$ est homotopiquement équivalent à $\mathcal{F}_n\mathbb{C} \times \mathbb{T}^n$. En outre, l'homéomorphisme entre $\mathcal{R}(n)$ et $\mathcal{M}(n) \times \mathbb{T}^n$ permet d'obtenir de l'information topologique sur $\mathcal{A}(n)$, l'ensemble des fonctions d'Ahlfors rationnelles de degré n. Enfin, comme application, on démontre à la section 9.6 que la positivité des résidus d'une fonction rationnelle n-good n'est ni une condition nécessaire ni une condition suffisante pour être une fonction d'Ahlfors rationnelle et ce, pour chaque entier $n \geq 3$.

9.1 Préliminaires sur la convergence au sens de Carathéodory

Definition 9.1. Soit (X_k) une suite de domaines dans $\mathbb{C}_\infty$ telle que $\infty \in X_k$ pour tout k. On définit le *noyau* de (X_k) (par rapport au point ∞), noté $\ker(X_k)$, comme étant le plus grand domaine X contenant le point ∞ et ayant la propriété que si K est un sous-ensemble compact de X, alors il existe un k_0 tel que $K \subseteq X_k$ pour tout $k \geq k_0$, si un tel domaine existe. Sinon, on dit que $\ker(X_k)$ n'existe pas.

De plus, on dit que (X_k) *converge vers* X (*au sens de Carathéodory*) si X est le noyau de toute sous-suite de (X_k). Dans ce cas, on écrit $X_k \to X$.

Le lemme suivant est une généralisation du théorème de Koebe stipulant que la famille $\mathcal{S}$ des fonctions schlicht sur le disque unité est normale :

Lemme 9.2. *Soit (X_k) comme dans la Définition 9.1. Pour $k \geq 1$, soit g_k univalente sur X_k et normalisée à l'infini. Si $X = \ker(X_k)$ existe, alors il existe une sous-suite $(g_{k_\ell})_{\ell=1}^{\infty}$ telle que $X = \ker(X_{k_\ell})$ et $(g_{k_\ell})_{\ell=1}^{\infty}$ converge localement uniformément vers une fonction g univalente sur X et normalisée à l'infini.*

Rappelons qu'une fonction h méromorphe au voisinage du point ∞ est dite *normalisée à l'infini* si

$$h(z) = z + \frac{d_1}{z} + \frac{d_2}{z^2} + \dots$$

au voisinage du point ∞.

Le théorème suivant fut d'abord démontré par Carathéodory pour des domaines simplement connexes :

Théorème 9.3 (Théorème de convergence de Carathéodory généralisé)**.** *Soit (X_k) comme dans la Définition 9.1. Pour $k \geq 1$, soit g_k univalente sur X_k et normalisée à l'infini. Supposons que $X_k \to X$. Alors $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ converge localement uniformément sur X vers une fonction univalente g normalisée à l'infini si et seulement si $(g_k(X_k))$ converge vers un certain domaine Y. Si c'est le cas, alors $Y = g(X)$ et $g_k^{-1} \to g^{-1}$ localement uniformément sur Y.*

Pour plus de détails, voir [18, Théorème 1, p.228].

9.2 Représentations de Koebe et topologie de l'ensemble des domaines n-connexes

Definition 9.4. On définit l'*espace des modules* $\mathcal{M}(n)$ comme étant l'ensemble des classes d'isomorphisme $[(X, E_1, \dots, E_n)]$ de domaines planaires X contenant le point ∞ et bornés par n courbes de Jordan analytiques disjointes $E_1, \dots, E_n$. Un *isomorphisme* entre $(X, E_1, \dots, E_n)$

et $(Y, F_1, \ldots, F_n)$ est par définition une application conforme $g : \overline{X} \to \overline{Y}$ normalisée à l'infini avec $g(E_j) = F_j$ pour chaque j.

Rappelons que toute application conforme entre deux domaines bornés par des courbes analytiques s'étend analytiquement à travers la frontière.

Il existe plusieurs domaines dits *canoniques* qui représentent tous les domaines n-connexes non dégénérés, à équivalence conforme près. Parmi ces domaines canoniques, les domaines dits *circulaires* ont l'avantage d'être bornés par des courbes de Jordan analytiques.

Definition 9.5. Un domaine $Y \subseteq \mathbb{C}_\infty$ est appelé *domaine circulaire* si chaque composante connexe de son complément est soit un disque ou un singleton.

Definition 9.6. Un domaine $Y \subseteq \mathbb{C}_\infty$ est dit *non dégénéré* si chaque composante connexe de son complément contient plus d'un point.

Théorème 9.7 (Koebe)**.** *Soit X un domaine n-connexe non dégénéré. Alors il existe une application conforme $g : X \to Y$, où Y est un domaine circulaire non dégénéré. De plus, si $h : X \to Z$ est une autre application conforme de X sur un domaine circulaire non dégénéré, alors $h = M \circ g$ pour une certaine transformation de Möbius M.*

Démonstration. Voir par exemple [7, Section 15.7]. □

Soit $[(X, E_1, \ldots, E_n)] \in \mathcal{M}(n)$ et soit $g : \overline{X} \to \overline{Y}$ une application conforme, où Y est un domaine circulaire non dégénéré. En composant g par une transformation de Möbius judicieusement choisie, on peut supposer que g est normalisée à l'infini. Alors avec normalisation, g est unique et est appelée *représentation de Koebe normalisée de X*. Soit c_j et r_j le centre et le rayon respectivement du cercle $g(E_j)$. Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \kappa & : & \mathcal{M}(n) & \to & \mathbb{C}^n \times (\mathbb{R}^+)^n \\ & & [(X, E_1, ..., E_n)] & \mapsto & ((c_1, ..., c_n), (r_1, ..., r_n)) \end{array}$$

est bien définie et injective. Son image est l'ensemble des $(c, r) \in \mathbb{C}^n \times (\mathbb{R}^+)^n$ tels que les n disques $\overline{\mathbb{D}}(c_j, r_j)$ sont disjoints. Il s'agit clairement d'un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^n$. On définit la topologie sur $\mathcal{M}(n)$ comme étant celle induite par l'application κ. Ainsi :

Proposition 9.8. *L'espace des modules $\mathcal{M}(n)$ est une variété de dimension réelle $3n$, avec une seule carte locale.*

Le prochain théorème donne un critère utile pour déterminer lorsqu'une suite de domaines donnée converge dans $\mathcal{M}(n)$ ou $\mathcal{M}(n)/\Sigma_n$:

Théorème 9.9. *Soit (X_k) une suite de domaines n-connexes non dégénérés contenant le point ∞. Supposons que (X_k) converge vers un domaine n-connexe non dégénéré X au sens de Carathéodory. Pour chaque k, soit $g_k : X_k \to Y_k$ la représentation de Koebe normalisée.*

Alors $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ converge localement uniformément sur X vers la représentation de Koebe normalisée $g : X \to Y$. En particulier, la suite de domaines cirulaires (Y_k) converge vers Y au sens de Carathéodory.

Démonstration. Montrons que toute sous-suite de $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ possède une sous-suite qui converge vers g, ce qui entraîne que la suite entière $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ converge vers g.

Par le Lemme 9.2, chaque sous-suite de $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ possède une sous-suite qui converge localement uniformément vers une fonction univalente sur X.

Soit h la limite localement uniforme d'une sous-suite $(g_k)_{k\in S}$. Alors h est normalisée à l'infini. Par le Théorème 9.3, la sous-suite correspondante de domaines $(Y_k)_{k\in S}$ converge vers $h(X)$ au sens de Carathéodory.

On affirme que $h(X)$ est un domaine circulaire n-connexe non dégénéré. Par unicité de la représentation de Koebe normalisée, ceci entraîne que $h = g$.

En effet, remarquons d'abord que $h(X)$ est n-connexe et non dégénéré, puisque h est univalente sur X. De plus, les suites des centres et des rayons des cercles bornant $(Y_k)_{k\in S}$ sont nécessairement bornées, car sinon le noyau de $(Y_k)_{k\in S}$ ne contiendrait pas un voisinage du point ∞. Ainsi, quitte à considérer une sous-suite si nécessaire, on peut supposer que les centres des cercles bornant $(Y_k)_{k\in S}$ convergent vers $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ et que les rayons correspondants convergent vers $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$. Or, comme $Y_k \to h(X)$ lorsque $k \to \infty$ dans S, il est alors facile de vérifier que $h(X)$ doit être le domaine borné par les cercles centrés en $c_1, c_2, \ldots, c_n$ et de rayons correspondants $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Comme $h(X)$ est n-connexe et non dégénéré, ces cercles doivent êtres disjoints et non dégénérés, et donc $h(X)$ est un domaine circulaire non dégénéré.

Enfin, le fait que $Y_k \to Y$ est une conséquence directe du Théorème 9.3.

□

Remarque. Un argument similaire montre qu'étant donné une suite de domaines circulaires n-connexes (Y_k) ainsi qu'un domaine circulaire n-connexe Y, alors (Y_k) converge vers Y si et seulement si les suites des centres et des rayons des cercles bornant (Y_k) convergent vers les centres et les rayons des cercles bornant Y.

9.3 Topologie de l'ensemble des fonctions rationnelles n-good

Rappelons que $\mathcal{R}(n)$ est défini comme étant l'ensemble des $(a,b) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n \times \mathbb{C}^n$ tels que la fonction rationnelle

$$R_{a,b}(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{z - b_j}$$

est n-good, i.e. satisfait l'un ou l'autre des énoncés équivalents de la Proposition 7.4.

Remarquons que $\mathcal{R}(n)$ est un sous-ensemble ouvert de $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n \times \mathbb{C}^n$ puisque les valeurs critiques de $R_{a,b}$ dépendent continûment de (a,b). Ainsi :

Proposition 9.10. *L'espace $\mathcal{R}(n)$ est une variété de dimension réelle $4n$ avec une seule carte locale.*

Notons que si $(a^k, b^k) \to (a,b)$ dans $\mathcal{R}(n)$, alors clairement $(R_{a^k,b^k})_{k=1}^{\infty}$ converge vers $R_{a,b}$ uniformément sur $\mathbb{C}_\infty$ selon la métrique sphérique. La réciproque est également vraie :

Lemme 9.11. *Soit $(R_k)_{k=1}^{\infty}$ une suite de fonctions rationnelles de degré n avec $R_k(\infty) = 0$ pour chaque k. Supposons que $(R_k)_{k=1}^{\infty}$ converge localement uniformément sur un certain ouvert U vers une fonction Q holomorphe sur U. Alors Q est une fonction rationnelle de degré au plus n.*

Si, de plus, Q est de degré exactement égal à n, alors $R_k \to Q$ uniformément sur $\mathbb{C}_\infty$ selon la métrique sphérique. De plus, $Q(\infty) = 0$ et les pôles et résidus de R_k convergent vers les pôles et résidus de Q.

Démonstration. Montrons d'abord que Q est une fonction rationnelle de degré au plus n. Écrivons $R_k = p_k/q_k$, où p_k et q_k sont des polynômes de degré au plus n. Soit D un disque fermé contenu dans U, et fixons un point $z_0 \in D$ qui n'est un zéro d'aucun q_k. Quitte à multiplier p_k et q_k par la même constante λ_k si nécessaire, on peut supposer que $\|q_k\|_{\infty,D} = 1$ et que $q_k(z_0) > 0$ pour chaque k. Alors les q_k appartiennent à la boule unité fermée de l'espace vectoriel de dimension finie des polynômes de degré au plus n, qui est compacte. Ainsi, il existe une sous-suite $(q_{k_l})_{l=1}^{\infty}$ telle que $q_{k_l} \to q$ uniformément sur D, où q est un polynôme de degré au plus n. De plus, on a que $\|q\|_{\infty,D} = 1$ et $q(z_0) \geq 0$. Maintenant, soit $p := Qq$. Alors comme $p_k = R_k q_k$, $R_k \to Q$ et $q_{k_l} \to q$ uniformément sur D, on obtient que $p_{k_l} \to p$ uniformément sur D. Le polynôme p est donc de degré au plus n, puisque chacun des p_k l'est. Enfin, Q est égale à la fonction rationnelle p/q, qui est de degré au plus n.

Supposons maintenant que le degré de Q est exactement n. Montrons d'abord que $q_k \to q$ localement uniformément sur $\mathbb{C}$, en montrant que chaque sous-suite de $(q_k)_{k=1}^{\infty}$ possède une sous-suite qui converge localement uniformément vers q. Par le même argument que dans la première partie de la preuve, chaque sous-suite de $(q_k)_{k=1}^{\infty}$ possède une sous-suite qui converge

uniformément sur D. Soit donc $\widetilde{q}$ la limite uniforme d'une sous-suite $(q_k)_{k\in S}$. Alors $\widetilde{q}$ est un polynôme de degré au plus n, $\|\widetilde{q}\|_{\infty,D} = 1$ et $\widetilde{q}(z_0) \geq 0$. Encore une fois, comme dans la première partie de la preuve, on obtient que si $\widetilde{p} := Q\widetilde{q}$, alors la sous-suite $(p_k)_{k\in S}$ converge vers $\widetilde{p}$ uniformément sur D. Ainsi, on a deux polynômes de degré au plus n, $\widetilde{p}$ et $\widetilde{q}$, tels que $Q = \widetilde{p}/\widetilde{q} = p/q$. Les polynômes $\widetilde{p}$ et $\widetilde{q}$, de même que p et q, ne peuvent avoir de facteur commun puisque Q est de degré n. Il suit que $\widetilde{p}$ a les mêmes zéros que p et que $\widetilde{q}$ a les mêmes zéros que q. Il existe donc une constante λ telle que $\widetilde{p} = \lambda p$ et $\widetilde{q} = \lambda q$. Or, $\|\widetilde{q}\|_{\infty,D} = \|q\|_{\infty,D} = 1$ et donc λ est unimodulaire. Comme Q est holomorphe sur D, on a que $q(z_0) > 0$ et $\widetilde{q}(z_0) > 0$, et donc $\lambda = 1$ et $\widetilde{q} = q$. Ainsi, la sous-suite $(q_k)_{k\in S}$ converge vers q uniformément sur D et donc localement uniformément sur $\mathbb{C}$, puisque toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.

Maintenant, comme $p_k = R_k q_k$, $p = Qq$ et $R_k \to Q$, $q_k \to q$ sur D, on obtient que $p_k \to p$ uniformément sur D. Encore une fois par l'équivalence des normes, $p_k \to p$ localement uniformément sur $\mathbb{C}$. On vérifie aisément que ceci implique que $R_k = p_k/q_k$ converge vers $Q = p/q$ localement uniformément sur $\mathbb{C}$ par rapport à la métrique sphérique.

Comme $R_k(\infty) = 0$ pour chaque k, q_k est de degré n et p_k est de degré au plus $n-1$. Ainsi, p est de degré au plus $n-1$. Le degré de q est donc exactement égal à n, d'où l'on déduit que $Q = p/q$ s'annule au point ∞.

Comme $q_k \to q$ localement uniformément sur $\mathbb{C}$, il découle du théorème de Rouché que les zéros de q_k convergent vers les zéros de q lorsque $k \to \infty$. Autrement dit, les pôles de R_k convergent vers les pôles de Q. En intégrant R_k sur un petit cercle centré en chacun des pôles de Q et en laissant $k \to \infty$, on obtient que les résidus de R_k convergent vers les résidus de Q.

Enfin, soit B un disque fermé centré au point ∞ ne contenant aucun des pôles de Q. Si k est suffisamment grand, alors R_k n'a pas de pôles dans B. Comme $R_k \to Q$ uniformément sur ∂B, le principe du maximum entraîne que la convergence est uniforme sur B. Ainsi, $R_k \to Q$ localement uniformément sur la sphère de Riemann en entier, selon la métrique sphérique. Comme $\mathbb{C}_\infty$ est compact, la convergence est uniforme. □

Notons que par définition, pour chaque $(a,b) \in \mathcal{R}(n)$, le domaine $R_{a,b}^{-1}(\mathbb{D})$ contient le point ∞ et est borné par n courbes de Jordan analytiques disjointes. En outre, comme il y a exactement un pôle de $R_{a,b}$ dans chaque composante de $\mathbb{C}_\infty \setminus R_{a,b}^{-1}(\mathbb{D})$, l'ordre $(b_1, \ldots, b_n)$ induit un ordre $(F_1, \ldots, F_n)$ des composantes de $\partial R_{a,b}^{-1}(\mathbb{D})$. On obtient donc une application

$$\begin{array}{rccl} P & : & \mathcal{R}(n) & \to & \mathcal{M}(n) \\ & & (a,b) & \mapsto & [(R_{a,b}^{-1}(\mathbb{D}), F_1, ..., F_n)]. \end{array}$$

Tel que mentionné précédemment, si (a^k, b^k) converge vers (a,b) dans $\mathcal{R}(n)$, alors R_{a^k,b^k} converge vers $R_{a,b}$ uniformément sur $\mathbb{C}_\infty$ selon la métrique sphérique. Ceci a pour conséquence

immédiate que les domaines $R^{-1}_{a^k,b^k}(\mathbb{D})$ convergent vers $R^{-1}_{a,b}(\mathbb{D})$ au sens de Carathéodory. À l'aide du Théorème 9.9, on déduit que $P(a^k, b^k)$ converge vers $P(a,b)$ dans $\mathcal{M}(n)$ et donc que P est continue. Ainsi :

Proposition 9.12. *L'application P définie par*

$$\begin{array}{rccc} P & : & \mathcal{R}(n) & \to & \mathcal{M}(n) \\ & & (a,b) & \mapsto & [(R^{-1}_{a,b}(\mathbb{D}), F_1, ..., F_n)]. \end{array}$$

est continue.

Si P est lisse et régulière, tel qu'affirmé sans preuve dans [26], alors l'image inverse $P^{-1}(\sigma)$ de chaque point $\sigma \in \mathcal{M}(n)$ est une sous-variété de $\mathcal{R}(n)$ de dimension

$$n = \dim \mathcal{R}(n) - \dim \mathcal{M}(n).$$

On ignore comment montrer que P est lisse et régulière, mais on démontre à la section 9.5 que $P^{-1}(\sigma)$ est homéomorphe au tore n-dimensionnel $\mathbb{T}^n$ et ce, pour chaque $\sigma \in \mathcal{M}(n)$.

En particulier, P est surjective, ce qui est également une conséquence du résultat suivant :

Théorème 9.13. *Soit $[(X, E_1, ..., E_n)] \in \mathcal{M}(n)$ et soit $\alpha_j \in E_j$ pour chaque j. Alors il existe un unique $(a,b) \in \mathcal{R}(n)$ et un unique isomorphisme*

$$g : (X, E_1, ..., E_n) \to (R^{-1}_{a,b}(\mathbb{D}), F_1, ..., F_n)$$

tels que la courbe F_j entoure b_j et $R_{a,b}(g(\alpha_j)) = 1$ pour chaque j.

Démonstration. Il s'agit simplement de combiner le Corollaire 7.12 et le Corollaire 7.15. □

9.4 Théorèmes de convergence

Rappelons que si X est un domaine n-connexe non dégénéré contenant le point ∞, alors une application holomorphe propre $f : X \to \mathbb{D}$ de degré n avec $f(\infty) = 0$ est appelée *application de Grunsky sur X*. De plus, la représentation de Bell de X associée à f est l'unique paire (R, g) telle que $f = R \circ g$, où R est fonction rationnelle n-good et $g : X \to R^{-1}(\mathbb{D})$ est une application conforme normalisée à l'infini (voir la section 7.3).

Montrons maintenant que (R, g) dépend continûment de X et de f :

Théorème 9.14. *Soit X, X_k des domaines n-connexes non dégénérés contenant le point ∞. Soit f et f_k des applications de Grunsky sur X et sur X_k respectivement. Supposons que $X_k \to X$ et que $f_k \to f$ localement uniformément sur X. Écrivons $f = R \circ g$ et $f_k = R_k \circ g_k$ comme dans le Corollaire 7.12, où R, R_k sont n-good et $g : X \to R^{-1}(\mathbb{D})$, $g_k : X_k \to R_k^{-1}(\mathbb{D})$ sont des applications conformes normalisées à l'infini. Alors $g_k \to g$ localement uniformément sur X et $R_k \to R$ uniformément sur $\mathbb{C}_\infty$ selon la métrique sphérique.*

Démonstration. Montrons que toute sous-suite $S \subseteq \mathbb{N}$ possède une sous-suite $S' \subseteq S$ pour laquelle on a la convergence voulue. Soit donc $S \subseteq \mathbb{N}$ une sous-suite quelconque.

Par le Lemme 9.2, $(g_k)_{k\in S}$ possède une sous-suite $(g_k)_{k\in S'}$ qui converge localement uniformément vers une fonction h univalente sur X et normalisée à l'infini. De plus, par le Théorème 9.3, les domaines $g_k(X_k)$ convergent vers $h(X)$ et $g_k^{-1} \to h^{-1}$ localement uniformément sur $h(X)$, lorsque $k \to \infty$ dans S'. Comme $f_k \to f$ localement uniformément sur X, on a que $R_k = f_k \circ g_k^{-1}$ converge vers $Q := f \circ h^{-1}$ localement uniformément sur $h(X)$, lorsque $k \to \infty$ dans S'.

Par le Lemme 9.11, Q est une fonction rationnelle de degré au plus n. Puisque f est de degré n et h est univalente, Q est de degré exactement n et $h(X)$ est n-connexe. De plus, comme la restriction $Q : h(X) \to \mathbb{D}$ est une application holomorphe propre de degré n, $h(X)$ est forcément égal à la préimage entière $Q^{-1}(\mathbb{D})$. Ainsi, Q est une fonction rationnelle n-good.

Par la partie unicité du Corollaire 7.12, $Q = R$ et $h = g$. Ainsi, $g_k \to g$ localement uniformément sur X et $R_k \to R$ localement uniformément sur $g(X)$, lorsque $k \to \infty$ dans S'. Comme la sous-suite $S \subseteq \mathbb{N}$ est arbitraire, la convergence est préservée lorsque $k \to \infty$ dans $\mathbb{N}$. Enfin, par le Lemme 9.11, R_k converge vers R uniformément sur $\mathbb{C}_\infty$ selon la métrique sphérique. □

Rappelons maintenant que si X est un domaine contenant le point ∞ et borné par les courbes analytiques $E_1, \ldots, E_n$ et si $\alpha_j \in E_j$ pour chaque j, alors l'application de Grunsky sur X pour $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est l'unique application de Grunsky f sur X telle que $f(\alpha_j) = 1$ pour chaque j (voir le Corollaire 7.15).

On aura besoin du fait que les applications de Grunsky dépendent continûment du domaine X de même que du n-tuple $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, du moins pour les domaines circulaires. Ceci repose essentiellement sur le lemme de compacité suivant :

Lemme 9.15. *Soit X un domaine circulaire n-connexe non dégénéré contenant le point ∞. Supposons que $X_k \to X$, où chaque X_k est un domaine circulaire n-connexe non dégénéré contenant le point ∞. Pour chaque k, soit f_k une application de Grunsky sur X_k. Alors il existe une sous-suite $(f_{k_\ell})_{\ell=1}^\infty$, une application de Grunsky f sur X et un voisinage U de $\overline{X}$ tels que f_{k_ℓ} et f s'étendent analytiquement à U pour tout ℓ et $(f_{k_\ell})_{\ell=1}^\infty$ converge uniformément vers f sur U.*

Démonstration. Dénotons par $E_1, ..., E_n$ les cercles bornant X et par J_j l'inversion par rapport au cercle E_j. Posons

$$Y := \overline{X} \cup J_1(X) \cup \cdots \cup J_n(X).$$

Similairement, soit $E_1^k, ..., E_n^k$ les cercles bornant X_k, numérotés de sorte que pour chaque j, le centre et le rayon de E_j^k convergent vers le centre et le rayon de E_j, lorsque $k \to \infty$. Soit

J_j^k l'inversion par rapport au cercle E_j^k et posons

$$Y_k := \overline{X_k} \cup J_1^k(X_k) \cup \cdots \cup J_n^k(X_k).$$

Pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a que J_j^k converge uniformément vers J_j sur $\mathbb{C}_\infty$ selon la métrique sphérique. Il suit que $Y_k \to Y$ au sens de Carathéodory. De plus, chaque f_k s'étend à une fonction méromorphe sur Y_k en vertu du principe de réflexion de Schwarz. Plus précisément, si J dénote l'inversion par rapport au cercle unité $\mathbb{T}$, alors pour $z \in J_j^k(X_k)$, on définit

$$f_k(z) := J(f_k(J_j^k(z))).$$

Soit $F_k := f_k^{-1}(\{-1, 1, i\})$. Alors pour chaque k, F_k est de cardinalité égale à $3n$ et est contenu dans ∂X_k. Par conséquent, quitte à considérer une sous-suite si nécessaire, on peut supposer que F_k converge vers un certain ensemble fini $F \subseteq \partial X$. Par le critère fondamental de Montel, on peut extraire une sous-suite $(f_{k_\ell})_{\ell=1}^\infty$ qui converge localement uniformément sur $Y \setminus F$, selon la métrique sphérique, vers une certaine fonction méromorphe f.

Pour chaque k, on a que $f_k(X_k) = \mathbb{D}$ et donc $f(X) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$. Ainsi, f est holomorphe sur X. De plus, $f_k(\partial X_k) = \mathbb{T}$ pour chaque k, d'où l'on obtient que $f(\partial X \setminus F) \subseteq \mathbb{T}$. Comme $f(\infty) = \lim_{\ell \to \infty} f_{k_\ell}(\infty) = 0$, ceci implique que f est non constante. Par le principe du maximum, $f(X) \subseteq \mathbb{D}$.

Soit $w \in \mathbb{D}$ et soit ζ un zéro de $f - w$ dans X de multiplicité m. Soit $D \subseteq X$ un disque fermé centré en ζ de rayon suffisamment petit pour que $f - w$ ne s'annule pas sur $D \setminus \{\zeta\}$. Comme $f_{k_\ell} \to f$ uniformément sur ∂D, il existe un L tel que

$$|(f_{k_\ell}(z) - w) - (f(z) - w)| < |f(z) - w|$$

pour tout $z \in \partial D$ et pour tout $\ell \geq L$. Par le théorème de Rouché, $f_{k_\ell} - w$ possède m zéros dans D en comptant les multiplicités. Or, $f_k - w$ a exactement n zéros dans X_k pour chaque k. Ainsi, $f - w$ a au plus n zéros dans X et f est donc de degré au plus n sur X. Ceci demeure vrai sur $J_j(X)$ pour chaque j puisque $f = J \circ f \circ J_j$. Remarquons que l'argument ci-dessus entraîne également que les zéros de f_{k_ℓ} dans X_{k_ℓ} convergent vers les zéros de f dans X dans le cas où le degré de f est exactement n.

Par le grand théorème de Picard, f ne peut avoir de singularité essentielle dans F. Ainsi, f s'étend à une fonction méromorphe sur Y. Par continuité, $f(\partial X) \subseteq \mathbb{T}$. On vérifie facilement que $f(E_j) = \mathbb{T}$ pour chaque j, puisque f est holomorphe sur un voisinage de ∂X. Ceci implique que f est de degré au moins n et donc exactement n sur $\overline{X}$. Enfin, $f : X \to \mathbb{D}$ est une application propre puisqu'elle s'étend continûment à $\overline{X}$ avec $f(\partial X) \subseteq \mathbb{T}$. Ainsi, f est une application de Grunsky.

Pour terminer, soit U un voisinage ouvert de $\overline{X}$ sur lequel f est bornée, avec $\overline{U} \subseteq Y$. Les identités $f_{k_\ell}(J_j^{k_\ell}(z)) = J(f_{k_\ell}(z))$ et $f(J_j(z)) = J(f(z))$ entraînent que z_0 est un zéro de f_{k_ℓ}

si et seulement si $J_j^{k_\ell}(z_0)$ est un pôle de f_{k_ℓ} pour chaque j, et similairement pour f. Comme les zéros de f_{k_ℓ} convergent vers les zéros de f et $J_j^{k_\ell}$ converge vers J_j uniformément sur $\mathbb{C}_\infty$ pour chaque j, il suit que les pôles de f_{k_ℓ} convergent vers les pôles de f. Quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que f_{k_ℓ} est holomorphe sur U et ce, pour chaque ℓ. Par le principe du maximum, la suite $(f_{k_\ell})_{\ell=1}^\infty$ converge vers f uniformément sur $\overline{U}$. En effet, ∂U est compact et contenu dans $Y \setminus F$, où $(f_{k_\ell})_{\ell=1}^\infty$ converge vers f localement uniformément.

□

Corollaire 9.16. *Soit $(X_k, E_1^k, ..., E_n^k)$ et $(X, E_1, ..., E_n)$ des domaines circulaires n-connexes non dégénérés contenant le point ∞. Supposons que pour chaque j, le centre et le rayon du cercle E_j^k convergent vers le centre et le rayon du cercle E_j respectivement, lorsque $k \to \infty$. Soit $\alpha^k \in \prod_{j=1}^n E_j^k$ et $\alpha \in \prod_{j=1}^n E_j$ tels que $\alpha^k \to \alpha$. Soit f_k et f les applications de Grunsky sur X_k et X pour α^k et α respectivement.*

Alors $(f_k)_{k=1}^\infty$ converge vers f localement uniformément sur X.

Démonstration. Soit $(f_k)_{k\in S}$ une sous-suite quelconque de $(f_k)_{k=1}^\infty$. Par le Lemme 9.15, on peut extraire une sous-suite $S' \subseteq S$ telle qu'il existe une application de Grunsky φ sur X et un voisinage U de $\overline{X}$ sur lequel φ et f_k s'étendent analytiquement pour chaque $k \in S'$ et $(f_k)_{k\in S'}$ converge vers φ uniformément. Pour chaque $j \in \{1, ..., n\}$, on a

$$\varphi(\alpha_j) = \lim_{\substack{k\to\infty \\ k\in S'}} f_k(\alpha_j^k) = 1$$

et donc $\varphi = f$ par le Corollaire 7.15. Ceci montre que toute sous-suite de $(f_k)_{k=1}^\infty$ possède une sous-suite qui converge vers f localement uniformément sur X. Ainsi, $(f_k)_{k=1}^\infty$ converge vers f localement uniformément sur X. □

Corollaire 9.17. *Soit $(X_k, E_1^k, ..., E_n^k)$ et $(X, E_1, ..., E_n)$ des domaines circulaires n-connexes non dégénérés contenant le point ∞. Supposons que pour chaque j, le centre et le rayon du cercle E_j^k convergent vers le centre et le rayon du cercle E_j respectivement, lorsque $k \to \infty$. Soit f_k et f des applications de Grunsky sur X_k et X respectivement. Soit $\beta^k, \beta \in \mathbb{T}^n$ tels que $\beta^k \to \beta$, et soit $\alpha_j^k \in E_j^k$ et $\alpha_j \in E_j$ tels que $f_k(\alpha_j^k) = \beta_j^k$ et $f(\alpha_j) = \beta_j$ pour chaque j.*

Si $(f_k)_{k=1}^\infty$ converge vers f localement uniformément sur X, alors $\alpha^k \to \alpha$.

Démonstration. Fixons $j \in \{1, ..., n\}$ et soit $(\alpha_j^k)_{k\in S}$ une sous-suite quelconque de $(\alpha_j^k)_{k=1}^\infty$. Comme le cercle E_j^k converge vers E_j, on peut extraire une sous-suite $S' \subseteq S$ telle que α_j^k converge vers un certain point $z_j \in E_j$, lorsque $k \to \infty$ dans S'. De plus, par le Lemme 9.15, il existe une autre sous-suite $S'' \subseteq S'$, une application de Grunsky φ sur X ainsi qu'un voisinage U de $\overline{X}$ sur lequel φ et f_k s'étendent analytiquement et $(f_k)_{k\in S''}$ converge vers φ

uniformément. Or, f_k converge localement uniformément vers f sur X, et donc nécessairement $\varphi = f$. De plus, par convergence uniforme, on a

$$f(z_j) = \lim_{\substack{k\to\infty \\ k\in S''}} f_k(\alpha_j^k) = \lim_{\substack{k\to\infty \\ k\in S''}} \beta_j^k = \beta_j.$$

Comme la restriction $f : E_j \to \mathbb{T}$ est injective, $z_j = \alpha_j$. Ainsi, toute sous-suite de $(\alpha_j^k)_{k=1}^\infty$ possède une sous-suite qui converge vers α_j, ce qui implique que la suite entière $(\alpha_j^k)_{k=1}^\infty$ converge vers α_j.

□

Le reste de cette section est dédié à l'étude de la convergence des fonctions d'Ahlfors lorsque leur domaine de définition varie.

Soit X un domaine n-connexe non dégénéré contenant le point ∞. Rappelons qu'en vertu du Théorème 3.3, la fonction d'Ahlfors sur X est une application de Grunsky. En particulier, si X est borné par des courbes de Jordan analytiques, alors elle s'étend analytiquement à un voisinage de $\overline{X}$.

On aura besoin du fait que les fonctions d'Ahlfors dépendent en quelque sorte continûment de leur domaine de définition, du moins lorsque le domaine limite est borné par des courbes de Jordan analytiques. Malheureusement, ceci s'avère faux en général et ce, même si chaque domaine considéré est circulaire et non dégénéré :

Exemple 9.4.1. Considérons $X := \mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}}$ et soit $(x_k)_{k=1}^\infty$ une suite dense dans le disque unité $\mathbb{D}$. Définissons X_k comme étant le complément dans $\mathbb{C}_\infty$ de disques fermés disjoints centrés en $x_1, x_2, \ldots, x_k$ et contenus dans $\mathbb{D}$, de rayon suffisamment petit pour que la capacité analytique de $\mathbb{C}_\infty \setminus X_k$ soit inférieure à $1/2$. L'existence d'une telle suite de disques découle directement de la Proposition 2.11 et du fait que la capacité analytique de tout ensemble fini est zéro. Il est facile de montrer que $X_k \to X$ au sens de Carathéodory. Or, les fonctions d'Ahlfors correspondantes f_k ne convergent pas localement uniformément vers la fonction d'Ahlfors sur X, car si c'était le cas on aurait $\gamma(\mathbb{C}_\infty \setminus X_k) \to \gamma(\mathbb{C}_\infty \setminus X) = 1$.

À la lumière de l'exemple précédent, une notion de convergence plus forte est requise.

Definition 9.18. Soit X et X_k des domaines dans $\mathbb{C}_\infty$. On dit que X_k *converge fortement vers* X, dénoté par $X_k \rightrightarrows X$, si pour chaque compact $K \subseteq X$ et chaque ouvert $U \supseteq \overline{X}$, on a que $K \subseteq X_k \subseteq U$ pour tout k suffisamment grand.

Notons que si $\infty \in X, X_k$ pour tout k et si X_k converge fortement vers X, alors X_k converge vers X au sens de Carathéodory.

Lemme 9.19. *Soit $X \subseteq \mathbb{C}_\infty$ un domaine contenant le point ∞ et borné par un nombre fini de courbes de Jordan analytiques disjointes. Supposons que $X_k \rightrightarrows X$, où les X_k sont des domaines contenant le point ∞. Soit f_k et f les fonctions d'Ahlfors sur X_k et X respectivement. Alors $(f_k)_{k=1}^\infty$ converge localement uniformément vers f sur X.*

Démonstration. Tel que remarqué précédemment, f s'étend analytiquement à un certain voisinage V de $\overline{X}$. Soit donc U un voisinage de $\overline{X}$ avec $\overline{U} \subseteq V$, de sorte que f est bornée sur U.

Montrons que toute sous-suite de $(f_k)_{k=1}^\infty$ possède une sous-suite qui converge vers f, ce qui est équivalent à la convergence de $(f_k)_{k=1}^\infty$ vers f.

Par le théorème de Montel, la suite uniformément bornée $(f_k)_{k=1}^\infty$ forme une famille normale. Ainsi, chaque sous-suite de $(f_k)_{k=1}^\infty$ possède une sous-suite qui converge localement uniformément sur X vers une certaine fonction holomorphe.

Soit donc g la limite localement uniforme d'une sous-suite. Alors $g \in \mathcal{O}(X, \overline{\mathbb{D}})$, et donc $g'(\infty) \leq f'(\infty)$.

Par hypothèse, $X_k \rightrightarrows X$, donc si k est suffisamment grand, alors $X_k \subseteq U$, donc f est holomorphe et bornée sur X_k. Posons $M_k := \|f\|_{\infty, X_k}$. Alors $M_k^{-1} f \in \mathcal{O}(X_k, \overline{\mathbb{D}})$ et donc $M_k^{-1} f'(\infty) \leq f_k'(\infty)$. Clairement, $M_k \to 1$ lorsque $k \to \infty$, puisque $X_k \rightrightarrows X$. Ainsi,

$$f'(\infty) \leq \liminf f_k'(\infty) \leq g'(\infty)$$

et donc $g'(\infty) = f'(\infty)$. Enfin, $g = f$ par unicité de la fonction d'Ahlfors. □

Si l'on requiert que chaque domaine X_k dans la suite possède la même connectivité que X, alors la convergence forte peut être remplacée par la convergence au sens de Carathéodory :

Théorème 9.20. *Soit X un domaine n-connexe non dégénéré contenant le point ∞. Supposons que $X_k \to X$, où chaque X_k est un domaine n-connexe non dégénéré contenant le point ∞. Soit f_k et f les fonctions d'Ahlfors sur X_k et X respectivement. Alors $(f_k)_{k=1}^\infty$ converge localement uniformément vers f sur X.*

Démonstration. Soit $h_k : X_k \to Y_k$ et $h : X \to Y$ les représentations de Koebe normalisées pour X_k et X respectivement. Alors par le Théorème 9.9, $(h_k)_{k=1}^\infty$ converge vers h localement uniformément sur X et $Y_k \to Y$. Comme Y_k et Y sont des domaines circulaires de connectivité n, on a en fait $Y_k \rightrightarrows Y$. Soit φ_k et φ les fonctions d'Ahlfors sur Y_k et Y respectivement. Alors par le Lemme 9.19, $(\varphi_k)_{k=1}^\infty$ converge vers φ localement uniformément sur Y. Or, par la loi de transformation des fonctions d'Ahlfors (Proposition 3.7), $f_k = \varphi_k \circ h_k$ et $f = \varphi \circ h$, d'où l'on déduit que $(f_k)_{k=1}^\infty$ converge vers f localement uniformément sur X.

□

9.5 Fonctions d'Ahlfors rationnelles

Soit $X \subseteq \mathbb{C}_\infty$ un domaine contenant le point ∞ et borné par n courbes de Jordan analytiques disjointes. Alors la fonction d'Ahlfors f sur X est une application de Grunsky. Par le Corollaire 7.12, il existe une unique fonction rationnelle n-good R et une unique application conforme

$$g : X \to R^{-1}(\mathbb{D})$$

normalisée à l'infini telles que $f = R \circ g$. La Proposition 3.7 implique alors que R est une fonction d'Ahlfors rationnelle de degré n

Supposons maintenant que Q est une autre fonction d'Ahlfors rationnelle de degré n pour laquelle il existe une application conforme

$$h : X \to Q^{-1}(\mathbb{D})$$

normalisée à l'identité à l'infini. Alors $Q \circ h$ est la fonction d'Ahlfors sur X et donc $Q = R$ par la partie unicité du Corollaire 7.12.

Definition 9.21. L'unique telle fonction R est appelée *fonction d'Ahlfors rationnelle associée à X*.

Definition 9.22. Pour $[(X, E_1, ..., E_n)] \in \mathcal{M}(n)$, on définit $A[(X, E_1, \ldots, E_n)]$ comme étant l'unique $(a, b) \in \mathcal{R}(n)$ tel que $R_{a,b}$ est la fonction d'Ahlfors rationnelle associée à X et $g(E_j)$ entoure b_j pour chaque j, où $g : X \to R_{a,b}^{-1}(\mathbb{D})$ est une application conforme normalisée à l'infini.

Notons que pour $R_{a,b}$ fixée, il existe une unique application conforme normalisée à l'infini $g : X \to R_{a,b}^{-1}(\mathbb{D})$. En effet, si $h : X \to R_{a,b}^{-1}(\mathbb{D})$ est une autre application conforme normalisée à l'infini, alors $g^{-1} \circ h$ est un automorphisme conforme de X normalisé à l'infini et doit donc être égal à l'identité, en vertu de [7, Proposition 15.4.8].

Lemme 9.23. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} A & : & \mathcal{M}(n) & \to & \mathcal{R}(n) \\ & & [(X, E_1, ..., E_n)] & \mapsto & (a, b) \end{array}$$

est bien définie et est un inverse à droite de l'application P de la section 9.3.

Démonstration. Soit $h : (X, E_1, \ldots, E_n) \to (Y, F_1, ..., F_n)$ un isomorphisme, soit f la fonction d'Ahlfors sur X et écrivons $f = R_{a,b} \circ g$, où $R_{a,b}$ est la fonction d'Ahlfors rationnelle associée à X et $g : X \to R_{a,b}^{-1}(\mathbb{D})$ est une application conforme normalisée à l'infini. Alors par la Proposition 3.7, la fonction d'Ahlfors sur Y est donnée par $f \circ h^{-1}$, qui se factorise de façon unique en $R_{a,b} \circ (g \circ h^{-1})$. Ainsi, $R_{a,b}$ est la fonction d'Ahlfors associée à Y et donc

$$A[(X, E_1, \ldots, E_n)] = (a, b) = A[(Y, F_1, \ldots, F_n)],$$

ce qui montre que l'application A est bien définie.

Maintenant, comme

$$g : (X, E_1, ..., E_n) \to (R_{a,b}^{-1}(\mathbb{D}), g(E_1), ..., g(E_n))$$

est un isomorphisme, on a

$$P(A[(X, E_1, \ldots, E_n)]) = P(a, b) = [(R_{a,b}^{-1}(\mathbb{D}), g(E_1), ..., g(E_n))] = [(X, E_1, \ldots, E_n)]$$

et donc A est bel et bien un inverse a droite de P. □

Considérons maintenant l'image $\mathcal{A}(n) := A(\mathcal{M}(n))$, qui représente l'ensemble des $(a, b) \in \mathcal{R}(n)$ tels que $R_{a,b}$ est une fonction d'Ahlfors rationnelle.

Tel que remarqué à la section 7.3, déterminer explicitement l'ensemble $\mathcal{A}(n)$ demeure un problème très difficile. Faute de pouvoir caractériser analytiquement les éléments de $\mathcal{A}(n)$, on peut toutefois étudier ses propriétés topologiques.

Ceci motive le résultat suivant, dans lequel on utilise l'application A pour construire un homéomorphisme entre $\mathcal{M}(n) \times \mathbb{T}^n$ et $\mathcal{R}(n)$, exhibant par le fait même différentes propriétés topologiques de $\mathcal{A}(n)$.

Théorème 9.24. *Il existe un homéomorphisme*

$$H : \mathcal{R}(n) \to \mathcal{M}(n) \times \mathbb{T}^n$$

tel que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}(n) & \xrightarrow{H} & \mathcal{M}(n) \times \mathbb{T}^n \\ & \searrow^{P} & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ & & \mathcal{M}(n) \end{array} \tag{9.1}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}(n) & \xrightarrow{H} & \mathcal{M}(n) \times \mathbb{T}^n \\ & \swarrow_{A} & \uparrow{\scriptstyle \iota} \\ & & \mathcal{M}(n) \end{array} \tag{9.2}$$

commutent, où $\pi : \mathcal{M}(n) \times \mathbb{T}^n \to \mathcal{M}(n)$ est la projection sur le premier facteur et $\iota : \mathcal{M}(n) \to \mathcal{M}(n) \times \mathbb{T}^n$ est l'inclusion de $\mathcal{M}(n)$ sous la forme $\mathcal{M}(n) \times \{(1, ..., 1)\}$.

Démonstration. Soit $(a, b) \in \mathcal{R}(n)$. On définit $H = (H_1, H_2)$ comme suit. Posons

$$H_1(a, b) := P(a, b) = [(R_{a,b}^{-1}(\mathbb{D}), F_1, ..., F_n)] \in \mathcal{M}(n),$$

où F_j est la courbe frontière de la composante connexe de $R_{a,b}^{-1}(\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{D})$ contenant b_j. Soit $\alpha_1, ..., \alpha_n$ les points appartenant à $F_1, ..., F_n$ respectivement tels que $R_{a,b}(\alpha_j) = 1$ pour chaque j. Aussi, soit $f : \overline{R_{a,b}^{-1}(\mathbb{D})} \to \overline{\mathbb{D}}$ la fonction d'Ahlfors. On définit

$$H_2(a, b) := (f(\alpha_1), ..., f(\alpha_n)) \in \mathbb{T}^n.$$

Notons que $H_2(a, b) = (1, \dots, 1)$ si et seulement si $R_{a,b}$ est la fonction d'Ahlfors sur $R_{a,b}^{-1}(\mathbb{D})$, autrement dit, si et seulement si $(a, b) = A(P(a, b))$.

Construisons maintenant un inverse G de H. Étant donné $[(X, E_1, ..., E_n)] \in \mathcal{M}(n)$, soit f la fonction d'Ahlfors sur X. Pour $(\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{T}^n$, soit α_j l'unique point de E_j tel que $f(\alpha_j) = \beta_j$. Par le Théorème 9.13, il existe un unique $(a, b) \in \mathcal{R}(n)$ et un unique isomorphisme $g : (X, E_1, ..., E_n) \to (R_{a,b}^{-1}(\mathbb{D}), F_1, ..., F_n)$ tels que la courbe F_j entoure b_j et $R_{a,b}(g(\alpha_j)) = 1$ pour chaque j. On définit

$$G([(X, E_1, ..., E_n)], (\beta_1, ..., \beta_n)) := (a, b).$$

Il est facile de vérifier que G est bien définie et est l'inverse de H, et que les diagrammes commutent. Par les propositions 9.8 et 9.10, $\mathcal{R}(n)$ et $\mathcal{M}(n)\times\mathbb{T}^n$ sont deux variétés de dimension $4n$. De ce fait, en vertu du théorème d'invariance de domaine de Brouwer, H est continue si et seulement si G l'est.

Montrons donc que G est continue. Soit $(X_k, E_1^k, ..., E_n^k)$ une suite de domaines circulaires qui converge vers un certain domaine circulaire $(X, E_1, ..., E_n)$ et soit $\beta^k \in \mathbb{T}^n$ une suite qui converge vers un certain $\beta \in \mathbb{T}^n$. Soit f_k et f les fonctions d'Ahlfors sur X_k et X respectivement. Soit $\alpha_j^k \in E_j^k$ tel que $f_k(\alpha_j^k) = \beta_j^k$ et soit $\alpha_j \in E_j$ avec $f(\alpha_j) = \beta_j$.

Le Théorème 9.20 entraîne que f_k converge vers f localement uniformément sur X. Par le Corollaire 9.17, on déduit que $\alpha^k \to \alpha$.

Maintenant, soit h_k et h les applications de Grunsky sur X_k et X pour α^k et α respectivement. Alors h_k converge vers h localement uniformément sur X, par le Corollaire 9.16.

Enfin, soit (a^k, b^k) et (a, b) tels que $R_{a^k,b^k} \circ g_k = h_k$ et $R_{a,b} \circ g = h$. Alors R_{a^k,b^k} converge vers $R_{a,b}$ uniformément sur $\mathbb{C}_\infty$, par le Théorème 9.14. Par le Lemme 9.11, ceci entraîne que $(a^k, b^k) \to (a, b)$.

□

Une conséquence directe est le fait que les applications P et A possèdent les mêmes propriétés topologiques que π et ι respectivement.

Corollaire 9.25. *L'application P est continue et ouverte. De plus, pour chaque $\sigma \in \mathcal{M}(n)$, $P^{-1}(\sigma)$ est homéomorphe à $\mathbb{T}^n$.*

Corollaire 9.26. *L'application $A : \mathcal{M}(n) \to \mathcal{R}(n)$ est continue, injective et son image $A(n) = A(\mathcal{M}(n))$ est fermée dans $\mathcal{R}(n)$.*

9.6 Application aux fonctions d'Ahlfors rationnelles avec résidus positifs

Soit $\mathcal{R}^+(n)$ le sous-ensemble de $\mathcal{R}(n)$ contenant les paramètres (a, b) tels que tous les a_j sont réels et positifs. Autrement dit,

$$\mathcal{R}^+(n) := \mathcal{R}(n) \cap ((\mathbb{R}^+)^n \times \mathbb{C}^n).$$

La présente section est dédiée à l'étude de la relation entre $\mathcal{A}(n)$ et $\mathcal{R}^+(n)$. La proposition suivante fournit un argument heuristique expliquant pourquoi il demeure naturel de s'attendre à ce que ces deux ensembles soient reliés d'une certaine façon :

Proposition 9.27. *Pour chaque $\sigma := [(X, E_1, \dots, E_n)] \in \mathcal{M}(n)$, $A(\sigma)$ est l'unique paramètre $(a, b) \in P^{-1}(\sigma)$ qui maximise la quantité* $\operatorname{Re} \sum_{j=1}^n a_j$.

Démonstration. Soit $(a, b) \in P^{-1}(\sigma)$. Alors $P(a, b) = \sigma$ et il existe une application conforme $g_{a,b} : X \to R_{a,b}^{-1}(\mathbb{D})$ normalisée à l'infini. Il suit que $R_{a,b} \circ g_{a,b} \in \mathcal{O}(X, \mathbb{D})$ et donc

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^n a_j = \operatorname{Re} R'_{a,b}(\infty) \leq |R'_{a,b}(\infty)| = |(R_{a,b} \circ g_{a,b})'(\infty)| \leq \gamma(\mathbb{C}_\infty \setminus X),$$

avec égalité si et seulement si $R_{a,b} \circ g_{a,b}$ est la fonction d'Ahlfors sur X. Par la Proposition 3.7, ceci est équivalent au fait que $R_{a,b}$ est la fonction d'Ahlfors sur $R_{a,b}^{-1}(\mathbb{D})$, i.e. $(a, b) = A(\sigma)$. □

Rappelons qu'au chapitre 8, on a montré que

$$\mathcal{A}(n) = \mathcal{R}^+(n)$$

pour $n = 1, 2$ et que

$$\mathcal{A}(n) \cap (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) = \mathcal{R}^+(n) \cap (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

pour tout n (voir les théorèmes 8.1, 8.4 et 8.7).

À la lumière de ces informations, un questionnement naturel subsiste :

Est-ce que $\mathcal{R}^+(n) = \mathcal{A}(n)$? Sinon, que peut-on affirmer concernant les inclusions $\mathcal{R}^+(n) \subseteq \mathcal{A}(n)$ et $\mathcal{A}(n) \subseteq \mathcal{R}^+(n)$?

Le résultat suivant fournit une réponse complète :

Théorème 9.28. *Pour chaque $n \geq 3$, $\mathcal{R}^+(n) \not\subseteq \mathcal{A}(n)$ et $\mathcal{A}(n) \not\subseteq \mathcal{R}^+(n)$.*

Démonstration. Montrons d'abord que $\mathcal{R}^+(n) \not\subseteq \mathcal{A}(n)$.

L'exemple 8.4.4 fournit une fonction rationnelle 3-good avec résidus positifs qui n'est pas une fonction d'Ahlfors rationnelle, soit

$$R(z) := \frac{0.4}{z} + \frac{0.4}{z-(1+i)} + \frac{0.4}{z-6}.$$

Soit $b_4, \ldots, b_n \in R^{-1}(\mathbb{D})$ distincts. Pour $\varepsilon > 0$, définissons

$$Q_\varepsilon(z) := R(z) + \sum_{j=4}^{n} \frac{\varepsilon}{z-b_j}.$$

On affirme que si ε est suffisamment petit, alors Q_ε est n-good mais n'est pas une fonction d'Ahlfors rationnelle.

En effet, remarquons d'abord que $Q_\varepsilon \to R$ localement uniformément sur $\mathbb{C}_\infty \setminus \{b_4, \ldots, b_n\}$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Ceci entraîne que $Q_\varepsilon^{-1}(\mathbb{D})$ converge fortement vers $R^{-1}(\mathbb{D}) \setminus \{b_4, \ldots, b_n\}$. En particulier, si ε est suffisamment petit, alors $\mathbb{C}_\infty \setminus Q_\varepsilon^{-1}(\mathbb{D})$ possède au moins n composantes connexes et donc exactement n, puisque Q_ε est de degré n. Par la Proposition 7.4, Q_ε est n-good.

Soit f la fonction d'Ahlfors sur $R^{-1}(\mathbb{D}) \setminus \{b_4, ..., b_n\}$. Remarquons que les singularités $b_4, \ldots, b_n$ de f sont enlevables. Ainsi, f est la fonction d'Ahlfors sur $R^{-1}(\mathbb{D})$. Puisque R n'est pas la fonction d'Ahlfors sur $R^{-1}(\mathbb{D})$, on a que $f'(\infty) > R'(\infty)$. Maintenant, soit f_ε la fonction d'Ahlfors sur $Q_\varepsilon^{-1}(\mathbb{D})$. En procédant comme dans la preuve du Lemme 9.19, on obtient que $f_\varepsilon \to f$ localement uniformément sur $R^{-1}(\mathbb{D}) \setminus \{b_4, ..., b_n\}$, lorsque $\varepsilon \to 0$. En particulier, $f'_\varepsilon(\infty) \to f'(\infty)$.

D'autre part, $Q'_\varepsilon(\infty) = R'(\infty) + (n-3)\varepsilon \to R'(\infty)$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Ainsi, si ε est suffisamment petit, alors

$$f'_\varepsilon(\infty) > Q'_\varepsilon(\infty).$$

Autrement dit, Q_ε n'est pas la fonction d'Ahlfors sur $Q_\varepsilon^{-1}(\mathbb{D})$.

Le vecteur contenant ses résidus et ses pôles est un élément de $\mathcal{R}^+(n) \setminus \mathcal{A}(n)$.

Pour démontrer que $\mathcal{A}(n) \not\subseteq \mathcal{R}^+(n)$, on aura besoin des lemmes suivants :

Lemme 9.29. *Soit $K \subseteq \mathcal{F}_n\mathbb{C}$ compact, où*

$$\mathcal{F}_n\mathbb{C} = \{(c_1, ..., c_n) \in \mathbb{C}^n : c_i \neq c_j \text{ pour } i \neq j\}.$$

Alors il existe un $\varepsilon > 0$ tel que si $b \in K$ et si $a = (a_1, \ldots, a_n)$ satisfait $0 < |a_j| \leq \varepsilon$ pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$, alors $R_{a,b}$ est n-good.

Démonstration. Il suffit de montrer que pour toute suite $(b^k)_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{F}_n\mathbb{C}$ qui converge vers un certain $b \in \mathcal{F}_n\mathbb{C}$ et toute suite $(a^k)_{k=1}^\infty \subseteq (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ qui converge vers 0, on a que R_{a^k,b^k} est

n-good pour tout k suffisamment grand. Puisque $a^k \to 0$ et $b^k \to b$, les fonctions rationnelles R_{a^k,b^k} convergent localement uniformément vers 0 sur $\mathbb{C}_\infty \setminus \{b_1, \ldots, b_n\}$. En particulier, pour tout sous-ensemble compact $E \subseteq \mathbb{C}_\infty \setminus \{b_1, \ldots, b_n\}$, E est contenu dans $R^{-1}_{a^k,b^k}(\mathbb{D})$ pour tout k suffisamment grand. Ainsi, si k est assez grand, alors $\mathbb{C}_\infty \setminus R^{-1}_{a^k,b^k}(\mathbb{D})$ possède au moins n composantes connexes, et donc R_{a^k,b^k} est n-good par la Proposition 7.4. □

Lemme 9.30. *$\mathcal{R}^+(n)$ est une sous-variété connexe de $\mathcal{R}(n)$ de dimension $3n$.*

Démonstration. Le fait que $\mathcal{R}^+(n)$ est une sous-variété de $\mathcal{R}(n)$ de dimension $3n$ est clair.

Montrons que $\mathcal{R}^+(n)$ est connexe par arc. Soit $(a^0, b^0), (a^1, b^1) \in \mathcal{R}^+(n)$. Pour relier (a^0, b^0) et (a^1, b^1) par un chemin dans $\mathcal{R}^+(n)$, on contracte d'abord le vecteur de résidus a^0 en conservant les pôles inchangés. Puis, lorsque les résidus sont suffisamment petits, on déplace les pôles de b^0 à b^1 en ajustant chacun des résidus séparément de sorte à pouvoir ensuite les dilater par un facteur commun pour jusqu'à a^1.

Il est bien connu (et facile à démontrer par induction) que $\mathcal{F}_n\mathbb{C}$ est connexe par arc. Soit donc $p : [0,1] \to \mathcal{F}_n\mathbb{C}$ un chemin reliant b^0 à b^1. Soit $K := p([0,1])$ et soit $0 < \varepsilon \leq \min(\|a^0\|_\infty, \|a^1\|_\infty)$ comme dans le lemme précédent.

Pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$, définissons

$$b_j^t := \begin{cases} b_j^0 & t \in [0, 1/3) \\ p(3t-1)_j & t \in [1/3, 2/3] \\ b_j^1 & t \in (2/3, 1] \end{cases}$$

et

$$a_j^t := \begin{cases} \mu_t a_j^0 & t \in [0, 1/3) \\ (2-3t)\mu_{1/3} a_j^0 + (3t-1)\nu_{2/3} a_j^1 & t \in [1/3, 2/3] \\ \nu_t a_j^1 & t \in (2/3, 1] \end{cases},$$

où

$$\mu_t := 1 - 3(1 - \varepsilon/\|a^0\|_\infty)t$$

et

$$\nu_t := 3\varepsilon/\|a^1\|_\infty - 2 + 3(1 - \varepsilon/\|a^1\|_\infty)t$$

sont tels que $\mu_0 = \nu_1 = 1$, $\mu_{1/3} a_j^0 \leq \varepsilon$ et $\nu_{2/3} a_j^1 \leq \varepsilon$ pour chaque j.

Remarquons que (a^t, b^t) est continue pour $t \in [0,1]$. De plus, les points $b_1^t, ..., b_n^t$ sont distincts. Enfin, $a_1^t, ..., a_n^t > 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Maintenant, notons que la fonction rationnelle R_{a^t,b^t} est n-good pour $t \in [0, 1/3)$ puisque

$$R_{a^t,b^t} = \mu_t R_{a^0,b^0}$$

et $\mu_t \in (0,1]$. De plus, elle est n-good pour $t \in (2/3, 1]$ car

$$R_{a^t,b^t} = \nu_t R_{a^1,b^1}$$

et $\nu_t \in (0,1]$. Enfin, R_{a^t,b^t} est n-good pour $t \in [1/3, 2/3]$ puisque $b^t \in K$ et $0 < a_j^t \leq \varepsilon$ pour chaque j.

Ainsi, (a^t, b^t) est un chemin reliant (a^0, b^0) à (a^1, b^1) dans $\mathcal{R}^+(n)$. □

On peut maintenant compléter la preuve du Théorème 9.28 en montrant que $\mathcal{A}(n) \nsubseteq \mathcal{R}^+(n)$:

Supposons, afin d'obtenir une contradiction, que $\mathcal{A}(n) = \mathcal{A}(\mathcal{M}(n))$ est un sous-ensemble de $\mathcal{R}^+(n)$. Par le Corollaire 9.26, l'application $A : \mathcal{M}(n) \to \mathcal{R}^+(n)$ est continue, injective et son image $A(\mathcal{M}(n))$ est fermée. Or, par le Lemme 9.30, $\mathcal{M}(n)$ et $\mathcal{R}^+(n)$ sont deux variétés de dimension $3n$. Il découle du théorème d'invariance de domaine de Brouwer que l'application A est ouverte. Donc $A(\mathcal{M}(n))$ est à la fois ouvert et fermé dans $\mathcal{R}^+(n)$, ce dernier étant connexe en vertu du Lemme 9.30. Par conséquent, $A(\mathcal{M}(n)) = \mathcal{R}^+(n)$, ce qui contredit la première partie du théorème. □

Remarque. L'argument ci-dessus est loin d'être constructif. Il serait donc intéressant de déterminer explicitement une fonction d'Ahlfors rationnelle dont les résidus ne sont pas tous positifs.

Chapitre 10

Conclusion

Pour conclure, décrivons brièvement quelques pistes de recherche intéressantes à explorer en lien avec le contenu de la présente thèse.

10.1 Distance de Carathéodory

Soit $X \subseteq \mathbb{C}_\infty$ un domaine n-connexe non dégénéré et soit $z_0, z \in X$, $z \neq z_0$. La *distance de Carathéodory* $c_X(z, z_0)$ est définie par

$$c_X(z, z_0) = \sup\{|f(z)| : f \in \mathcal{O}(X, \mathbb{D}), f(z_0) = 0\}.$$

L'existence d'une fonction extrémale découle d'un argument élémentaire de famille normale. Grunsky démontra dans [19] et [20] que celle-ci est unique à une constante unimodulaire près et qu'il s'agit d'une application de Grunsky sur X, c'est-à-dire une application holomorphe propre f de degré n de X sur $\mathbb{D}$ avec $f(z_0) = 0$.

Mentionnons également que la distance de Carathéodory est un invariant conforme, dans le sens que si $h : X \to Y$ est une application conforme, alors

$$c_X(z, z_0) = c_Y(h(z), h(z_0)).$$

Enfin, la distance de Carathéodory est symétrique : $c_X(z, z_0) = c_X(z_0, z)$ pour $z, z_0 \in X, z \neq z_0$.

La capacité analytique de $\mathbb{C}_\infty \setminus X$ *par rapport au point* z_0, notée γ_{z_0} et définie par

$$\gamma_{z_0}(\mathbb{C}_\infty \setminus X) := \sup\{|f'(z_0)| : f \in \mathcal{O}(X, \mathbb{D})\},$$

est un cas limite de la distance de Carathéodory :

$$\gamma_{z_0}(\mathbb{C}_\infty \setminus X) = \lim_{z \to z_0} c_X(z, z_0).$$

Il serait intéressant de développer une méthode permettant de calculer la distance de Carathéodory de domaines bornés par des courbes analytiques par morceaux, en utilisant des idées similaires à celles du chapitre 5. On pourrait également étudier l'analogue du problème de Jeong–Taniguchi (Problème 7.2) pour la distance de Carathéodory.

Enfin, remarquons que la question de savoir si les disques de Carathéodory

$$\mathbb{D}_{c_X}(z_0, r) := \{z \in X : c_X(z, z_0) < r\}$$

sont connexes pour tout $r > 0$ demeure encore à ce jour sans réponse (voir [38]). Une méthode numérique pour le calcul de la distance de Carathéodory $c_X(z, z_0)$ pourrait permettre d'effectuer certaines expérimentations.

10.2 Calcul de la capacité analytique de fractales

En second lieu, il serait intéressant d'appliquer la méthode du chapitre 5, conjointement avec un certain procédé d'approximation, pour calculer la capacité analytique de certaines fractales, comme par exemple des ensembles de Cantor planaires. L'article [28] présente certains problèmes ouverts en lien avec la capacité analytique de ces ensembles, d'où l'intérêt d'une méthode numérique efficace.

10.3 Applications de Grunsky et fonctions d'Ahlfors

Soit $X \subseteq \mathbb{C}_\infty$ un domaine n-connexe non dégénéré et soit $z_0 \in X$. Rappelons qu'en vertu du Théorème 3.3, la fonction d'Ahlfors f sur X par rapport au point z_0, c'est-à-dire l'unique fonction $f \in \mathcal{O}(X, \mathbb{D})$ avec $f'(z_0) = \gamma_{z_0}$, est une application holomorphe propre de degré n. À la lumière de cette affirmation, un questionnement naturel subsiste :

Parmi les applications holomorphes propres de degré n de X sur $\mathbb{D}$, lesquelles sont des fonctions d'Ahlfors sur X par rapport à un certain point z_0 ?

10.4 Conjecture 6.3.1 pour $n = 3$

Une preuve de la Conjecture 6.3.1 demeure probablement en dehors de la portée des méthodes actuelles en ce qui a trait à la capacité analytique. Or, qu'en est-il pour des petites valeurs de n ? Une approche possible est la suivante :

Soit K l'union d'un nombre fini de disques fermés et disjoints de rayon $r > 0$, disons

$$K := \cup_{j=1}^{n} \overline{\mathbb{D}}(z_j, r),$$

et soit $X := \mathbb{C}_\infty \setminus K$.

Rappelons que la classe de Smirnov $E^2(X)$ définie dans la sous-section 4.2.1 est un espace de Hilbert par rapport au produit scalaire

$$\langle f, g\rangle := \int_{\partial X} f(z)\overline{g(z)}|dz| \qquad (f, g \in E^2(X)).$$

De plus, à l'aide du Corollaire 4.16, on montre facilement que si z_0 est un point quelconque appartenant à l'intérieur de K et si $f \in E^2(X)$, alors

$$f(\infty) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial X} \frac{f^*(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta.$$

Ceci implique que l'évaluation au point ∞ est une fonctionnelle linéaire bornée sur $E^2(X)$ et donc, en vertu du théorème de représentation de Riesz, il existe une unique fonction $S(z, \infty) \in E^2(X)$, appelée *noyau de Szegő*, tel que

$$f(\infty) = \int_{\partial X} f(z)\overline{S(z, \infty)}|dz| \qquad (f \in E^2(X)).$$

La quantité $S(\infty, \infty)$ s'avère intimement reliée à la capacité analytique de K :

$$\gamma(K) = \frac{1}{2\pi S(\infty, \infty)}.$$

Voir par exemple [17, Théorème 4.3].

Maintenant, soit $\{e_m\}$ une base orthonormée pour $E^2(X)$. Alors on a

$$S(z, \infty) = \sum_{m=1}^{\infty} \langle S(\cdot, \infty), e_m\rangle e_m(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \overline{e_m(\infty)} e_m(z)$$

et donc

$$\gamma(K) = \frac{1}{2\pi \sum_{m=1}^{\infty} |e_m(\infty)|^2}.$$

Pour obtenir une base orthonormée de $E^2(X)$, rappelons que par le Corollaire 5.6, le span des fonctions $f_0(z) := 1$ et $f_{jk}(z) := (z - z_j)^{-k}$ $(1 \leq j \leq n,\, k \in \mathbb{N})$ est dense dans $E^2(X)$. En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on obtient une base orthonormée $\{e_m\}$.

Remarquons que tout ce qui a été fait précédemment demeure valide pour tout compact borné par des courbes de Jordan analytiques par morceaux. Or, dans le cas d'unions finies de disques disjoints, les intégrales intervenant dans le procédé de Gram-Schmidt peuvent être calculées analytiquement, fournissant ainsi en théorie une formule explicite pour $\gamma(K)$.

Étant donné la complexité de cette formule dans le cas général, il semble difficile d'en déduire de l'information intéressante concernant la capacité analytique $\gamma(K)$. Toutefois, peut-être le cas $n = 3$ est-il plus accessible.

10.5 Sous-additivité dans le cas triplement connexe

Le théorème de Suita (voir [43]) peut-il être généralisé au cas triplement connexe ? Autrement dit, a-t-on l'inégalité

$$\gamma(E \cup F) \leq \gamma(E) + \gamma(F)$$

si E et F sont des compacts disjoints possédant une et deux composantes connexes respectivement ?

10.6 Une généralisation du problème de la soudure conforme

Soit X un domaine contenant le point ∞ et borné par n courbes de Jordan disjointes, disons $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, et soit f la fonction d'Ahlfors sur X. Alors pour chaque j, la restriction $f : \gamma_j \to \mathbb{T}$ est un homéomorphisme. De plus, la courbe γ_j sépare la sphère de Riemann en deux composantes connexes, disons $\mathbb{C}_\infty \setminus \gamma_j = X_j^+ \cup X_j^-$, où X_j^+ est la composante contenant X. Soit donc $f_j : \mathbb{D} \to X_j^-$ une application conforme, dont l'existence est assurée par le théorème de représentation de Riemann. Alors $f \circ f_j : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ est un homéomorphisme.

Le problème de la soudure conforme généralisé est le suivant :

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ des homéomorphismes. Sous quelle(s) condition(s) existe-t-il un domaine X contenant le point ∞ et borné par n courbes de Jordan $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ tel que

$$\phi_j = f \circ f_j \qquad (1 \leq j \leq n)?$$

Dans le cas $n = 1$, le problème ci-dessus se réduit au problème classique de la soudure conforme, en vertu du Théorème 2.14. Le théorème fondamental de la soudure conforme stipule que dans ce cas, une condition suffisante est que ϕ_1 soit *quasisymétrique*, c'est-à-dire qu'il existe une constante $M > 0$ tel que

$$\frac{1}{M} \leq \frac{|\phi_1(I)|}{|\phi_1(J)|} \leq M$$

pour toute paire d'arcs adjacents $I, J \subseteq \mathbb{T}$ de même longueur.

Le fait que chacun des homéomorphismes ϕ_j soit quasisymétrique est-il une condition suffisante pour le problème de la soudure conforme généralisé ?

10.7 Capacitabilité

Ce dernier problème ouvert, bien que peu présent dans la littérature, illustre à merveille les limites de la compréhension actuelle des propriétés de la capacité analytique.

Une des propriétés élémentaires est la *régularité extérieure* de la capacité analytique : si $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \dots$ est une suite décroissante d'ensembles compacts et si $K := \cap_n K_n$, alors

$$\gamma(K) = \lim_{n\to\infty} \gamma(K_n).$$

La capacité analytique satisfait-elle une certaine *régularité intérieure* ? Autrement dit, si $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \dots$ est une suite croissante d'ensembles compacts et si $K := \cup_n K_n$ est compact, alors a-t-on

$$\gamma(K) = \lim_{n\to\infty} \gamma(K_n)?$$

Cette question s'avère étroitement liée au problème de la *capacitabilité* de la capacité analytique. Donner une réponse complète, sans aucune hypothèse sur le nombre de composantes connexes des K_n ou sur la disposition de ces derniers les uns par rapport aux autres, semble être très difficile.

Bibliographie

[1] L.V. Ahlfors : Bounded analytic functions. *Duke Math. J.*, 14:1–11, 1947.

[2] G.D. Anderson, M.K. Vamanamurthy et M.K. Vuorinen : *Conformal invariants, inequalities, and quasiconformal maps*. Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. John Wiley & Sons Inc., New York, 1997.

[3] S.R. Bell : *The Cauchy transform, potential theory, and conformal mapping*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[4] S.R. Bell, E. Deger et T. Tegtmeyer : A Riemann mapping theorem for two-connected domains in the plane. *Comput. Methods Funct. Theory*, 9(1):323–334, 2009.

[5] S.R. Bell et F. Kaleem : The structure of the semigroup of proper holomorphic mappings of a planar domain to the unit disc. *Comput. Methods Funct. Theory*, 8(1-2):225–242, 2008.

[6] L. Bieberbach : über einen riemannschen satz aus der lehre von der konformen abbildung. *Sitz.-Ber. Berliner Math. Ges.*, 24:6–9, 1925.

[7] J.B. Conway : *Functions of one complex variable. II*, volume 159 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[8] G. David : Unrectifiable 1-sets have vanishing analytic capacity. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 14(2):369–479, 1998.

[9] J.J. Dudziak : *Vitushkin's conjecture for removable sets*. Universitext. Springer, New York, 2010.

[10] P.L. Duren : *Theory of H^p spaces*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 38. Academic Press, New York, 1970.

[11] P. Ebenfelt, D. Khavinson et H. S. Shapiro : Two-dimensional shapes and lemniscates. *In Complex analysis and dynamical systems IV. Part 1*, volume 553 de *Contemp. Math.*, pages 45–59. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.

[12] S.D. Fisher : On Schwarz's lemma and inner functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 138:229–240, 1969.

[13] S.D. Fisher : *Function theory on planar domains*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons Inc., New York, 1983.

[14] M. Fortier Bourque et M. Younsi : Rational Ahlfors functions. *arXiv :1307.5042*, prépublication, 2013.

[15] P. R. Garabedian : Schwarz's lemma and the Szegö kernel function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 67:1–35, 1949.

[16] J. Garnett : Positive length but zero analytic capacity. *Proc. Amer. Math. Soc. 24 (1970), 696-699 ; errata, ibid.*, 26:701, 1970.

[17] J. Garnett : *Analytic capacity and measure*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 297. Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[18] G. M. Goluzin : *Geometric theory of functions of a complex variable*. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 26. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969.

[19] H. Grunsky : Eindeutige beschränkte Funktionen in mehrfach zusammenhängenden Gebieten. I. *Jber. Deutsch. Math. Verein.*, 50:230–255, 1940.

[20] H. Grunsky : Eindeutige beschränkte Funktionen in mehrfach zusammenhängenden Gebieten. II. *Jber. Deutsch. Math. Verein.*, 52:118–132, 1942.

[21] H. Grunsky : *Lectures on theory of functions in multiply connected domains*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1978. Studia Mathematica, Skript 4.

[22] S. J. Havinson : The analytic capacity of sets related to the non-triviality of various classes of analytic functions, and on Schwarz's lemma in arbitrary domains. *Mat. Sb. (N.S.)*, 54 (96):3–50, 1961.

[23] S. J. Havinson : Two papers on extremal problems in complex analysis. volume 129 de *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*. (1986).

[24] M. Jeong et M. Taniguchi : Algebraic kernel functions and representation of planar domains. *J. Korean Math. Soc.*, 40(3):447–460, 2003.

[25] M. Jeong et M. Taniguchi : Bell representations of finitely connected planar domains. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131(8):2325–2328, 2003.

[26] M. Jeong et M. Taniguchi : The coefficient body of Bell representations of finitely connected planar domains. *J. Math. Anal. Appl.*, 295(2):620–632, 2004.

[27] D. Khavinson : On removal of periods of conjugate functions in multiply connected domains. *Michigan Math. J.*, 31(3):371–379, 1984.

[28] J. Mateu, X. Tolsa et J. Verdera : On the semiadditivity of analytic capacity and planar Cantor sets. *In Harmonic analysis at Mount Holyoke (South Hadley, MA, 2001)*, volume 320 de *Contemp. Math.*, pages 259–278. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[29] M. S. Melnikov : Analytic capacity : a discrete approach and the curvature of measure. *Mat. Sb.*, 186(6):57–76, 1995.

[30] T. Murai : Analytic capacity (a theory of the Szegő kernel function). *In Selected papers on analysis, probability, and statistics*, volume 161 de *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 51–74. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[31] Z. Nehari : *Conformal mapping*. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, Toronto, London, 1952.

[32] P. Painlevé : Sur les lignes singulières des fonctions analytiques. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys.*, 2:B1–B130, 1888.

[33] C. Pommerenke : Über die analytische Kapazität. *Arch. Math. (Basel)*, 11:270–277, 1960.

[34] C. Pommerenke : *Boundary behaviour of conformal maps*, volume 299 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[35] T. Ransford : Computation of logarithmic capacity. *Comput. Methods Funct. Theory*, 10(2):555–578, 2010.

[36] J. Rostand : Computing logarithmic capacity with linear programming. *Experiment. Math.*, 6(3):221–238, 1997.

[37] W. Rudin : *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third édition, 1987.

[38] G. Schmieder : On Schwarz's lemma in multiply connected domains. *Comput. Methods Funct. Theory*, 5(1):159–184, 2005.

[39] E. Sharon et D. Mumford : 2d-shape analysis using conformal mapping. *Computer Vision and Pattern Recognition*, 2:350–357, 2004.

[40] V.I. Smirnov et N.A. Lebedev : *Functions of a complex variable : Constructive theory*. Translated from the Russian by Scripta Technica Ltd. The M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1968.

[41] E.P. Smith : The Garabedian function of an arbitrary compact set. *Pacific J. Math.*, 51:289–300, 1974.

[42] N. Suita : On a metric induced by analytic capacity. *Kōdai Math. Sem. Rep.*, 25:215–218, 1973.

[43] N. Suita : On subadditivity of analytic capacity for two continua. *Kodai Math. J.*, 7(1):73–75, 1984.

[44] X. Tolsa : Painlevé's problem and the semiadditivity of analytic capacity. *Acta Math.*, 190(1):105–149, 2003.

[45] X. Tolsa : Painlevé's problem and analytic capacity. *Collect. Math.*, (Vol. Extra):89–125, 2006.

[46] G.C. Tumarkin et S.J. Havinson : Classes of analytic functions on multiply connected domains. *In Issledovaniya po sovremennym problemam teorii funkciĭ kompleksnogo peremennogo*, pages 45–77. Gosudarstv. Izdat. Fiz.-Mat. Lit., Moscow, 1960.

[47] A.G. Vituškin : Analytic capacity of sets in problems of approximation theory. *Uspehi Mat. Nauk*, 22(6 (138)):141–199, 1967.

[48] M. Younsi et T. Ransford : Computation of analytic capacity and applications to the subadditivity problem. *Comput. Methods Funct. Theory*, 13(3):337–382, 2013.

[49] L. Zalcman : *Analytic capacity and rational approximation.* Lecture Notes in Mathematics, No. 50. Springer-Verlag, Berlin, 1968.